تهجين الطريقة التجميعية مع تقريب بادي لحل مسائل القيم الحدية الضبابية

ولاء حداد*، بشير نور خراط **،نصر الدين عيد **،عبد القادر جوخدار***

*طالبة دراسات عليا(دكتوراه)، قسم الرياضيات، كلية العلوم، جامعة حلب.

**أستاذ، قسم الرياضيات، كلية العلوم، جامعة حلب.

*** أستاذ، قسم الميكاترونيكس كلية الهندسة الكهربائية، جامعة حلب.

الملخص

طورنا في هذا العمل الطريقة (التجميعية) بتهجينها مع تقريبات بادي الكسرية لحل مسائل قيم حدية ضبابية بحالة الضبابية في المعادلة التفاضلية و الشروط الحدودية .

من خلال هذا البحث طبقنا الطريقة التجميعية لإيجاد حلول مسائل قيم حدية ضبابية وذلك باستخدام تابع تجريبي كسري (تابع بادي) بمعاملات ضبابية يحقق الشروط الحدية للمسألة ، بغية التأكد من دقة و فاعلية هذه الطريقة قمنا بالمقارنة مع طريقة غالركين بحساب الخطأ المرتكب في الحل التجريبي الناتج عن تطبيق الطريقة المقترحة وطريقة غالركين باستخدام برنامج (Maple) وتوصلنا إلى نتائج قريبة من الحل الدقيق بخطأ مرتكب صغير نسبياً.

الكلمات المفتاحية: الطريقة (التجميعية)، مسألة قيم حدية ضبابية ، تابع بادي .

ورد البحث للمجلة بتاريخ 2020/9/6

قبل للنشر بتاريخ 2020/11/26

Hybridizing of Collocation Method with Padè Approximations for Solving Fuzzy Boundary Value Problems

Walaa Hadad*, Bachir Nour Kharrat, Naser Alden Ide**, Abd Alkader Gokhdar*****

*Postgraduate Student (PhD), Dept. of Mathematics, Faculty of Science, University of Aleppo.

**Prof., Dept. of Mathematics, Faculty of Science, University of Aleppo.

***Prof., Dept. of Mechatronics, Faculty of Electricity, University of Aleppo

Abstract

In this paper, numerical solutions of different order Fuzzy boundary value problems are developed using the collocation method with pade` approximation.

The collocation method is considered to solve the fuzzy boundary value problems using padè approximation with fuzzy coefficient, in which the fuzziness appeared together in the boundary conditions.

Fuzzy function (padè approximation) is assumed which is made to satisfy the boundary conditions given, and used to generate the residual to be minimized. To investigate the effectiveness of the method, numerical examples were considered which were compared with both the exact solution and the solution obtained by Galerkin method in the literature. The proposed method proves very accurate, better, efficient and appropriate.

Keywords: The collocation method, Fuzzy boundary value problems, pade approximation.

Received 6/ 9 /2020
Accepted 26 / 11 /2020

1 .مقدمة:

درست الطريقة التجميعية (the collocation method) من قبل الرياضيين Y.A.S.Aregbesola [1] و R.A.Oderinu [2] لحل مسائل قيم حدية من مراتب مختلفة، والتي تعطي حلاً تجريبياً للمسألة .

لقد استخدمت عدة طرائق عددية وأخرى تحليلية في حل مسائل قيم حدية ضبابية من مراتب مختلفة منها طريقة غالركين [3] لحل مسائل القيم الحدية وطريقة القذيفة [4] والطريقة التجميعية [5] ، وفي هذا العمل سنقوم بتطوير الطريقة (التجميعية) باستخدام تقريب بادي [6] لحل معادلات تفاضلية حدودية ضبابية.

2 .أهمية البحث:

تأتي أهمية البحث من إمكانية تهجين تقريب بادي الكسري بمعاملات ضبابية مع الطريقة التجميعية لحل مسائل قيم حدية ضبابية .

3. الهدف من البحث:

1- إيجاد حلول عددية لمسائل قيم حدية ضبابية باستخدام تقريب بادي الكسري.

4.العدد الضبابي:

هناك تعاريف أساسية للعدد الضبابي :

تعريف (1):[7]

العدد الضبابي $\tilde{M}$ **من النمط** LR, إذا وجدت توابعه(L يسمى التابع اليساري و R التابع اليميني) بحيث يتحقق: $L(x) \le \mu_{\tilde{M}}(x) \le R(x) \quad \forall x \in X$

و

$$\mu_{\tilde{M}}(x) = \begin{cases} L(\frac{m-x}{a}) & for \quad x \le m \\ R(\frac{x-m}{b}) & for \quad x \ge m \end{cases}$$

حيث إن a,b عددان موجبان و m عدد حقيقي يدعى قيمة رئيسية ل $\tilde{M}$ وبالتالي يعبر عن العدد الضبابي $\tilde{M}$ بالشكل $(m,a,b)_{LR}$

تعريف (2):[8]

العدد الضبابي $\tilde{M}$ يمكن أن يعبر عنه باستخدام مبدأ مجموعات مستويات القطع α بالشكل :

$$M_{\alpha}=[m-\sqrt{1-\alpha},m+\sqrt{1+\alpha}]$$

or

$$M_{\alpha}=[\alpha m,\frac{1}{\alpha}m]$$

حيث إن m القيمة الرئيسية ل $\tilde{M}$ و $\alpha\in[0,1]$ وهذا العدد الضبابي يمكن أن يكتب بالشكل: $M_{\alpha}=[\tilde{M},\bar{\tilde{M}}]$ حيث أن $\tilde{M}$ يشير إلى الحد الأدنى الأصغري و $\bar{\tilde{M}}$ الحد الأعلى الأعظمي.

5 . التابع الضبابي:[8]

يمكن التعبير عن التابع الضبابي $\tilde{f}$ بالشكل :

$$f_{\alpha}=[\alpha f(x),\frac{1}{\alpha}f(x)];\quad x\in X,\alpha\in[0,1]$$

و α عدد ضبابي ضمن المجال [0,1] ويكتب التابع الضبابي بالشكل :

$$f_{\alpha}=[f,\bar{f}]$$

6.مفاهيم المشتق الضبابي [9]

ليكن $f:]a,b[\to R_f$ تابع ضبابي و $x_0\in]a,b[$ نقول بالتعريف إن f قابل للاشتقاق في النقطة x_0 وفق مفهوم **هاكهارا** H إذا وجد عنصر $f'_{GH}(x_0)\in R_f$ بحيث يكون من أجل كل $h>0$ صغيار بشكل كاف :

$$\exists f(x_0+h)-_h f(x_0), f(x_0)-_h f(x_0-h);$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-_h f(x_0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0)-_h f(x_0-h)}{h}=f'_{GH}(x_0)$$

أو:

$$\exists f(x_0)-_h f(x_0+h), f(x_0-h)-_h f(x_0);$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0)-_h f(x_0+h)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0-h)-_h f(x_0)}{h}=f'_{GH}(x_0)$$

أو:

$$\exists f(x_0+\mathrm{h})-_h f(x_0), f(x_0-\mathrm{h})-_h f(x_0);$$
$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+\mathrm{h})-_h f(x_0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0-\mathrm{h})-_h f(x_0)}{h}=f'_{GH}(x_0)$$

أو :

$$\exists f(x_0)-_h f(x_0+\mathrm{h}), f(x_0)-_h f(x_0-\mathrm{h});$$
$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0)-_h f(x_0+\mathrm{h})}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0)-_h f(x_0-\mathrm{h})}{h}=f'_{GH}(x_0)$$

* ونقول أن $f:]\mathrm{a},\mathrm{b}[\to \mathrm{R}_f$ تابع قابل للاشتقاق وفق مفهوم gH في النقطة $x_0\in]a,b[$ إذا كان :

$$\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}(f(x_0+\mathrm{h})-_{gh} f(x_0))=f'_{gH}(x_0)$$

حيث أنه إذا وجد $f'_{gH}(x_0)\in \mathrm{R}_f$ عندها نقول أن f قابل للاشتقاق وفق مفهوم **Hukhara** .

6.مسألة قيم حدية ضبابية :[10]

تعرف مسألة القيم الحدية الضبابية من المرتبة n، بالشكل:

$$y^{(n)}(\mathrm{x})=f(x,y(x),y'(x),y''(x),.....,y^{(n-1)}(x))$$
$$+Q(x);x\in[a,b]$$

والمزودة بالشروط الحدية الضبابية:

$$A_1y(a)+B_1y'(a)+.....+c_1y^{(n-1)}(a)=[K_1]^\alpha=[K_{1_\alpha},\overline{K}_{1_\alpha}]$$
$$A_2y(b)+B_2y'(b)+.....+c_2y^{(n-1)}(b)=[K_2]^\alpha=[K_{2_\alpha},\overline{K}_{2_\alpha}]$$

حيث أن: $A_1^{\,2}+B_1^{\,2}+..+C_1^{\,2}\neq 0$, $A_2^{\,2}+B_2^{\,2}+..+C_2^{\,2}\neq 0$

والمشتقات الضبابية x توابع ضبابية بالنسبة للمتحول f, y والتوابع $y'(x), \mathrm{y}''(\mathrm{x}), \mathrm{y}'''(\mathrm{x}),..., \mathrm{y}^{(n-1)}(x)$ و

$$[K_1]^\alpha=[K_{1_\alpha},\overline{K}_{1_\alpha}]$$
$$[K_2]^\alpha=[K_{2_\alpha},\overline{K}_{2_\alpha}]$$

هي أعداد ضبابية.

7.تقريب بادي pade :[6]

ليكن $f(x)$ تابعاً كثير حدود من الدرجة N ، ويمكن تقريب هذا التابع بكثيرة حدود كسرية من الدرجة n للبسط و m للمقام بحيث يكون $N=n+m$ لها الشكل: $r(x)=p(x)/q(x)$ حيث إن p,q كثيرا حدود بمجموع درجات يساوي N ،أي $N=n+m$ حيث درجة p تساوي n ودرجة q تساوي m أي:

$$r(x)=\frac{p(x)}{q(x)}=\frac{p_0+p_1x+p_2x^2+...+p_nx^n}{q_0+q_1x+q_2x^2+...+q_mx^m};q_0=1$$

إن تقنية تقريب بادي تختار N+1 وسيطاً بحيث يتحقق الشرط:

$f^{(k)}(0)=r^{(k)}(0)$ من أجل: $k=0,1,2,....N$

إن تقريب بادي هو تمديد لكثير حدود تايلور التقريبي لتابع كسري .

8.تقنية الطريقة التجميعية المهجنة مع تابع بادي الكسري بمعاملات ضبابية في حل مسائل قيم حدية ضبابية:

لتكن مسألة القيم الحدية الضبابية من المرتبة n التالية:

$$\tilde{y}^{(n)}(t;r)+a_{n-1}(t)\tilde{y}^{(n-1)}(t;r)+...+a_1(t)\tilde{y}'(t;r)+a_0(t)\tilde{y}(t;r)=\tilde{g}(t;r) \quad (1)$$

حيث إن $\tilde{g}(t;r)$ معادلة تفاضلية بتابع ضبابي $\tilde{y}(t;r)$

حيث إن $\tilde{y}(t;r)$ تابع ضبابي.

حيث إن $a_i(t),0\le i\le n-1$ توابع مستمرة على المجال I.

والمزودة بالشروط الحدية :

$\tilde{y}(a;r)=[\beta(r),\overline{\beta}(r)],\tilde{y}(b;r)=[\gamma(r),\overline{\gamma}(r)]$ _

لحل مسألة القيم الحدية الضبابية:

1. نختار التابع التجريبي :

$$\tilde{y}(t;r)=\tilde{\phi}_0(t;r)+f\cdot\frac{\sum_{i=0}^{n}\tilde{c}_i\,t^i}{1+\sum_{j=1}^{m}\tilde{b}_j\,t^j}$$

بحيث أنه: $\tilde{\phi}_0(t;r)=[\underline{M}\,\beta(r)+\underline{N}\,\gamma(r),M\,\bar{\beta}(r)+N\,\bar{\gamma}(r)]$

$$f=(t-a).(b-t)$$

و $\tilde{c}_i,\tilde{b}_j$ أعداد ضبابية.

$$M=\frac{b-t}{b-a}\quad ;N=\frac{t-a}{b-a}$$

والذي يحقق الشروط الحدية لمسألة القيم الحدية الضبابية.

2.نعوض التابع التجريبي بالمعادلة التفاضلية لمسألة القيم الحدية الضبابية لتوليد الباقي والذي يعطى بالشكل:

$$\tilde{R}(t;r,\tilde{c}_1,\tilde{c}_2,....,\tilde{c}_n,\tilde{b}_1,\tilde{b}_2,....,\tilde{b}_m)=$$
$$[\underline{R}(t;r,\underline{c}_1,c_2,....,c_n,\underline{b}_1,b_2,....,b_m),\bar{R}(t;r,\bar{c}_1,\bar{c}_2,....,\bar{c}_n,\bar{b}_1,\bar{b}_2,....,\bar{b}_m)]$$

وبتطبيق الطريقة التجميعية والتي تستوجب أن يساوي الباقي صفراً في نقاط داخلية ضمن المنطقة أي أنه:

$$\tilde{R}(t;r,\tilde{c}_1,\tilde{c}_2,....,\tilde{c}_n,\tilde{b}_1,\tilde{b}_2,....,\tilde{b}_m;x_1)=0$$
$$\tilde{R}(t;r,\tilde{c}_1,\tilde{c}_2,....,\tilde{c}_n,\tilde{b}_1,\tilde{b}_2,....,\tilde{b}_m;x_2)=0$$
.
..
...
$$\tilde{R}(t;r,\tilde{c}_1,\tilde{c}_2,....,\tilde{c}_n,\tilde{b}_1,\tilde{b}_2,....,\tilde{b}_m;x_{n+m})=0$$

وبحل جملة المعادلات الجبرية غير الخطية السابقة باستخدام برنامج المابل نحصل على الحل .

9. تطبيقات:

تطبيق (1): [3]

لتكن مسألة القيم الحدية الضبابية التالية:

$$\tilde{y}'' + \tilde{y} + t = 0; \quad t \in [0,1]$$
$$\tilde{y}(0) = [0.1r - 0.1, 0.1 - 0.1r]$$
$$\tilde{y}(1) = [0.1r - 0.1, 0.1 - 0.1r]$$

الحل :

نفرض الحل التجريبي الضبابي من الشكل :

$$\tilde{y}(t;r) = \tilde{\phi}_0(t;r) + f \cdot \frac{\sum_{i=0}^{n} \tilde{c}_i t^i}{1 + \sum_{j=1}^{m} \tilde{b}_j t^j} \quad ; n = 3, m = 2$$

$$\tilde{\phi}_0(t;r) = [M\,\beta(r) + N\,\gamma(r), M\,\bar{\beta}(r) + N\,\bar{\gamma}(r)]$$
$$f = (t-a).(b-t)$$

(واخترنا درجة البسط 3 ودرجة المقام 2 وذلك اختيار فقط يمكن اختيار الدرجة التي نريد مع مراعاة أن تكون درجة البسط أكبر أو تساوي درجة المقام وعندها يكون تقريب بادي أفضل)

فيكون :

$$\tilde{\phi}_0(t;r) = [(0.1r - 0.1), (0.1 - 0.1r)]$$

$$\tilde{y}(t;r) = \tilde{\phi}_0(t;r) + t(1-t)\left(\frac{\tilde{c}_0 + \tilde{c}_1 t + \tilde{c}_2 t^2 + \tilde{c}_3 t^3}{1 + \tilde{b}_1 t + \tilde{b}_2 t^2}\right)$$

وبحساب الخطأ المرتكب $\tilde{R}$:

$$\tilde{R} = [R(t;\underline{r}, c_0, \underline{c_1}, \underline{c_2}, \underline{c_3}, \underline{b_1}, \underline{b_2}), \underline{R}(t;r, \overline{c_0}, \overline{c_1}, \overline{c_2}, \overline{c_3}, \overline{b_1}, \overline{b_2})$$

الصيغة الرياضية لعبارة الخطأ:

$$
\begin{aligned}
R = & -\frac{2\left(c_0 + c_1 t + c_2 t^2 + c_3 t^3\right)}{1 + b_1 t + b_2 t^2} \\
& + \frac{2(1-t)\left(c_1 + 2c_2 t + 3c_3 t^2\right)}{1 + b_1 t + b_2 t^2} \\
& - \frac{2(1-t)\left(c_0 + c_1 t + c_2 t^2 + c_3 t^3\right)\left(b_1 + 2b_2 t\right)}{\left(1 + b_1 t + b_2 t^2\right)^2} \\
& - \frac{2t\left(c_1 + 2c_2 t + 3c_3 t^2\right)}{1 + b_1 t + b_2 t^2} \\
& + \frac{2t\left(c_0 + c_1 t + c_2 t^2 + c_3 t^3\right)\left(b_1 + 2b_2 t\right)}{\left(1 + b_1 t + b_2 t^2\right)^2} \\
& + \frac{t(1-t)\left(2c_2 + 6c_3 t\right)}{1 + b_1 t + b_2 t^2} \\
& - \frac{2t(1-t)\left(c_1 + 2c_2 t + 3c_3 t^2\right)\left(b_1 + 2b_2 t\right)}{\left(1 + b_1 t + b_2 t^2\right)^2} \\
& + \frac{2t(1-t)\left(c_0 + c_1 t + c_2 t^2 + c_3 t^3\right)\left(b_1 + 2b_2 t\right)^2}{\left(1 + b_1 t + b_2 t^2\right)^3} \\
& - \frac{2t(1-t)\left(c_0 + c_1 t + c_2 t^2 + c_3 t^3\right) b_2}{\left(1 + b_1 t + b_2 t^2\right)^2} + 0.1r - 0.1 \\
& + \frac{t(1-t)\left(c_0 + c_1 t + c_2 t^2 + c_3 t^3\right)}{1 + b_1 t + b_2 t^2} + t
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
R = & -\frac{2\left(\bar{c}_0 + \bar{c}_1 t + \bar{c}_2 t^2 + \bar{c}_3 t^3\right)}{1 + \bar{b}_1 t + \bar{b}_2 t^2} \\
& + \frac{2(1-t)\left(\bar{c}_1 + 2\bar{c}_2 t + 3\bar{c}_3 t^2\right)}{1 + \bar{b}_1 t + \bar{b}_2 t^2} \\
& - \frac{2(1-t)\left(\bar{c}_0 + \bar{c}_1 t + \bar{c}_2 t^2 + \bar{c}_3 t^3\right)\left(\bar{b}_1 + 2\bar{b}_2 t\right)}{\left(1 + \bar{b}_1 t + \bar{b}_2 t^2\right)^2} \\
& - \frac{2t\left(\bar{c}_1 + 2\bar{c}_2 t + 3\bar{c}_3 t^2\right)}{1 + \bar{b}_1 t + \bar{b}_2 t^2} \\
& + \frac{2t\left(\bar{c}_0 + \bar{c}_1 t + \bar{c}_2 t^2 + \bar{c}_3 t^3\right)\left(\bar{b}_1 + 2\bar{b}_2 t\right)}{\left(1 + \bar{b}_1 t + \bar{b}_2 t^2\right)^2} \\
& + \frac{t(1-t)\left(2\bar{c}_2 + 6\bar{c}_3 t\right)}{1 + \bar{b}_1 t + \bar{b}_2 t^2} \\
& - \frac{2t(1-t)\left(\bar{c}_1 + 2\bar{c}_2 t + 3\bar{c}_3 t^2\right)\left(\bar{b}_1 + 2\bar{b}_2 t\right)}{\left(1 + \bar{b}_1 t + \bar{b}_2 t^2\right)^2} \\
& + \frac{1}{\left(1 + \bar{b}_1 t + \bar{b}_2 t^2\right)^3}\Big(2t(1-t)\left(\bar{c}_0 + \bar{c}_1 t\right. \\
& \left. + \bar{c}_2 t^2 + \bar{c}_3 t^3\right)\left(\bar{b}_1 + 2\bar{b}_2 t\right)^2\Big) \\
& - \frac{2t(1-t)\left(\bar{c}_0 + \bar{c}_1 t + \bar{c}_2 t^2 + \bar{c}_3 t^3\right)\bar{b}_2}{\left(1 + \bar{b}_1 t + \bar{b}_2 t^2\right)^2} + 0.1 \\
& - 0.1\, r + \frac{t(1-t)\left(\bar{c}_0 + \bar{c}_1 t + \bar{c}_2 t^2 + \bar{c}_3 t^3\right)}{1 + \bar{b}_1 t + \bar{b}_2 t^2} + t
\end{aligned}
$$

وبجعل الباقي صفراً في نقاط داخلية ضمن المنطقة وذلك وفقاً للطريقة التجميعية نجد أن :

$$\tilde{R}(0.1428571429, r) = 0 \quad , \tilde{R}(0.5714285714, r) = 0$$
$$\tilde{R}(0.2857142857, r) = 0 \quad \tilde{R}(0.7142857143, r) = 0$$
$$\tilde{R}(0.4285714286, r) = 0 \quad \tilde{R}(0.8571428571, r) = 0$$

وينتج لدينا 12 معادلة غير خطية بحلها باستخدام برنامج maple نحصل على معاملات الحل الضبابي التجريبي :

$$c_0 = 0.05463029151r+0.1337650027$$

$$\overline{c_0} = -0.05463029151r+0.2430255857$$

$$c_1 = [2.800000000\times10^{-11}(1.650936141\times10^{28}r^3+5.653459375\times10^{29}r^2 +4.675727750\times10^{30}r+4.188159055\times10^{31})]/(5.778941661\times10^{19}r^2+ 5.206674653\times10^{20}r+6.381374255\times10^{21})$$

$$\overline{c_1} = [-4.000000000\times10^{-12}(1.155655299\times10^{29}r^3-4.650814741\times10^{30}r^2 +4.994656685\times10^{31}r-3.753855328\times10^{32})]/(5.778941661\times10^{19}r^2- 7.518251317\times10^{20}r+7.653866851\times10^{21})$$

$$c_2 = -[1.000000000\times10^{-12}(1.446072069\times10^{29}r^3+1.142019478\times10^{30}r^2 +1.480197043\times10^{31}r+1.433437171\times10^{31})]/(5.778941661\times10^{19}r^2+ 5.206674653\times10^{20}r+6.381374255\times10^{21})$$

$$\overline{c_2} = [2.000000000\times10^{-12}(7.230360344\times10^{28}r^3-1.004831360\times10^{30}r^2 +1.055266741\times10^{31}r-2.483162408\times10^{31})]/(5.778941661\times10^{19}r^2- 7.518251317\times10^{20}r+7.653866851\times10^{21})$$

$$c_3 = -[1.666666667\times10^{-13}(1.552387795\times10^{29}r^3+3.321871990\times10^{30}r^2 +3.079572220\times10^{31}r+2.047456028\times10^{32})]/(5.778941661\times10^{19}r^2+ 5.206674653\times10^{20}r+6.381374255\times10^{21})$$

$$\overline{c_3} = [1.666666667\times10^{-13}(1.552387795\times10^{29}r^3-4.253304668\times10^{30}r^2+ 4.594607552\times10^{31}r-2.808664454\times10^{32})]/(5.778941661\times10^{19}r^2- 7.518251317\times10^{20}r+7.653866851\times10^{21})$$

$$b_1 = [3.564104989\times10^{18}r^2+4.251785941\times10^{19}r+1.611771499\times10^{17}]/ (5.778941661\times10^{19}r^2+5.206674653\times10^{20}r+6.381374255\times10^{21})$$

$$\overline{b_1} = [3.564104989\times10^{18}r^2-5.677427933\times10^{19}r+9.945331578\times10^{19}]/(5.778941661\times10^{19}r^2 -7.518251317\times10^{20}r+7.653866851\times10^{21})$$

$$b_2 = [0.5000000000(3.564104989\times10^{18}r^2+1.450908964\times10^{19}r+ 2.802736791\times10^{20})]/(5.778941661\times10^{19}r^2+5.206674653\times10^{20}r +6.381374255\times10^{21})$$

$$\overline{b_2} = [.5000000000(3.564104989\times10^{18}r^2-2.876550959\times10^{19}r+3.235482784\times10^{20})]/ (5.778941661\times10^{19}r^2-7.518251317\times10^{20}r+7.653866851\times10^{21})$$

وبمقارنة الحل الضبابي الناتج عن طريقة التهجين مع طريقة غالركين [3] ومع الحل الدقيق وذلك بحساب الخطأ المرتكب في كلتا الطريقتين وذلك من خلال الجدول التالي :

جدول (1):يبين الخطأ المرتكب في الحد الأدنى الناتج عن استخدام طريقة تهجين الطريقة التجميعية مع تقريب بادي والخطأ المرتكب الناتج عن استخدام طريقة غالركين لحل المسألة السابقة من أجل t=0.1 :

r	$\underline{y}(t;r)$ باستخدام غالركين	$\underline{y}(t;r)$ باستخدام طريقة التهجين	$\underline{Y}(t;r)$ الحل الدقيق	الخطأ المرتكب في الحد الأدنى للحل بطريقة التهجين	الخطأ المرتكب في الحد الأدنى للحل بطريقة غالركين
0	-0.08635504166	-0.0863127920	-0.0863127972	$4.899\,10^{-7}$	4.2244×10^{-5}
0.1	-0.07585963199	-0.0758173578	-0.07581736311	$4.906\,10^{-7}$	4.2269×10^{-5}
0.2	-0.06536422231	-0.0653219236	-0.06532192901	$4.912\,10^{-7}$	4.2293×10^{-5}
0.3	-0.05486881264	-0.0548264893	-0.05482649492	$4.919\,10^{-7}$	4.2318×10^{-5}
0.4	-0.04437340297	-0.0443310551	-0.04433106083	$4.925\,10^{-7}$	4.2342×10^{-5}
0.5	-0.03387799329	-0.0338356208	-0.03383562673	$4.932\,10^{-7}$	4.2367×10^{-5}
0.6	-0.02338258362	-0.0233401866	-0.02334019264	$4.938\,10^{-7}$	4.2391×10^{-5}
0.7	-0.01288717395	-0.0128447524	-0.01284475854	$4.945\,10^{-7}$	4.2415×10^{-5}
0.8	-0.02391764276	-0.0023493181	-0.00234932445	$4.951\,10^{-7}$	4.2440×10^{-5}
0.9	0.008103645397	0.00814611608	0.008146109643	$4.958\,10^{-7}$	4.2464×10^{-5}

جدول (2):يبين الخطأ المرتكب في الحد الأعلى الناتج عن استخدام طريقة تهجين الطريقة التجميعية مع تقريب بادي والخطأ المرتكب الناتج عن استخدام طريقة غالركين لحل المسألة السابقة من أجل t=0.1 :

r	$\overline{y}(t;r)$ باستخدام غالركين	$\overline{y}(t;r)$ باستخدام طريقة التهجين	$\overline{Y}(t;r)$ الحل الدقيق	الخطأ المرتكب في الحد الاعلى للحل بطريقة التهجين	الخطأ المرتكب في الحد الأعلى للحل بطريقة غالركين
0	0.1235531518	0.1235958927	0.1235958847	$-4.557\,10^{-7}$	9.2771×10^{-6}
0.1	0.1130577421	0.1131004584	0.1131004506	$-4.564\,10^{-7}$	9.2706×10^{-6}
0.2	0.1025623325	0.1026050242	0.1026050165	$-4.570\,10^{-7}$	9.2641×10^{-6}
0.3	0.09206692278	0.09210958999	0.09210958239	$-4.576\,10^{-7}$	9.2576×10^{-6}
0.4	0.0816141483	0.08161415574	0.0816141483	$-4.583\,10^{-7}$	9.2511×10^{-6}
0.5	0.0711187142	0.07111872150	0.07111187142	$-4.589\,10^{-7}$	9.2445×10^{-6}

0.6	0.06062328011	0.06062328727	0.06062328011	$-4.595\,10^{-7}$	9.2380×10^{-6}
0.7	0.05012784602	0.05012785302	0.05012784602	$-4.602\,10^{-7}$	9.2315×10^{-6}
0.8	0.03963241192	0.03963241878	0.03963241192	$-4.608\,10^{-7}$	9.2250×10^{-6}
0.9	0.02913697783	0.02913698454	0.02913697783	$-4.615\,10^{-7}$	9.2185×10^{-6}

نلاحظ من الجدولين السابقين أن الخطأ المرتكب في طريقة التهجين لتقريب بادي مع الطريقة التجميعية أصغر من الخطأ المرتكب عند استخدام طريق غالركين ومنه طريقة التهجين تعطي نتائج فعالة و دقيقة في حل مسائل قيم حدية ضبابية .

تطبيق (2):[3] لتكن مسألة القيم الحدية الضبابية التالية :

$$\frac{d^2\tilde{T}}{dx^2} = 400(\tilde{\mathrm{T}}-30)$$

$$\tilde{T}(0;\mathrm{r}) = [20\,\mathrm{r}+280, 320-20\,\mathrm{r}]$$

$$\tilde{\mathrm{T}}'(0.05;\mathrm{r}) = [0.8\,\mathrm{r}-0.8, 0.2-0.2\,\mathrm{r}]$$

الحل : تعبر المسألة السابقة عن محسن ناقل حرارة من الجدار حيث إن $\tilde{T}$ درجة حرارة الجدار ضبابية وقطر الناقل 1 mm وطول (pin fin) من الالمنيوم 50 mm ومعامل تسخين الحرارة $20\ W/\mathrm{m}^2/c^\circ$ ودرجة حرارة المحيط $30c^\circ$. نفرض الحل التجريبي الضبابي من الشكل :

$$\tilde{\mathrm{y}}(\mathrm{x};\mathrm{r}) = \tilde{\phi}_0(\mathrm{x};\mathrm{r}) + f\,.\frac{\sum_{i=0}^{n}\tilde{c}_i\,.\,\mathrm{x}^i}{1+\sum_{j=1}^{m}\tilde{b}_j\,.\,\mathrm{x}^j} \quad ;n=8, m=8$$

$$\tilde{\phi}_0(\mathrm{x};\mathrm{r}) = [M\,\beta(r)+N\,\gamma(r), M\,\bar{\beta}(r)+N\,\bar{\gamma}(r)]$$

$$\mathrm{f} = (\mathrm{x}-\mathrm{a}).(\mathrm{b}-\mathrm{x})$$

(واخترنا درجة البسط 8 ودرجة المقام 8 وذلك اختيار فقط يمكن اختيار الدرجة التي نريد مع مراعاة أن تكون درجة البسط أكبر أو تساوي درجة المقام وعندها يكون تقريب بادي أفضل)

فيكون :

$$\tilde{\phi}_0(\mathrm{x};\mathrm{r}) = [(20\,\mathrm{r}+280)+x\,(0.8\,\mathrm{r}-0.8), (320-20\,\mathrm{r})+\mathrm{x}(0.2-0.2\,\mathrm{r})]$$

$$\tilde{y}(x;r)=\tilde{\phi}_0(x;r)+\left(\frac{\tilde{c}_0+\tilde{c}_1x+\tilde{c}_2x^2+\tilde{c}_3x^3+\tilde{c}_4x^4+\tilde{c}_5x^5+\tilde{c}_6x^6+\tilde{c}_7x^7+\tilde{c}_8x^8}{1+\tilde{b}_1x+\tilde{b}_2x^2+\tilde{b}_3x^3+\tilde{b}_4x^4+\tilde{b}_5x^5+\tilde{b}_6x^6+\tilde{b}_7x^7+\tilde{b}_8x^8}\right)$$

وبحساب الخطأ المرتكب $\tilde{R}$:

$$\tilde{R}=[R(t;r,c_0,c_1,c_2,c_3,c_4,c_5,c_6,c_7,c_8,b_1,b_2,b_3,b_4,b_5,b_6,b_7,b_8),$$
$$\overline{R}(t;r,\overline{c}_0,\overline{c}_1,\overline{c}_2,\overline{c}_3,\overline{c}_4,\overline{c}_5,\overline{c}_6,\overline{c}_7,\overline{c}_8,\overline{b}_1,\overline{b}_2,\overline{b}_3,\overline{b}_4,\overline{b}_5,\overline{b}_6,\overline{b}_7,\overline{b}_8)$$

وذلك بتعويض التابع التجريبي في المعادلة التفاضلية لمسألة القيم الحدية الضبابية الموجودة لدينا:

$$y(x;r)=(20r+280)+x(0.8r-0.8)+\left(\frac{c_0+c_1x+c_2x^2+c_3x^3+c_4x^4+c_5x^5+c_6x^6+c_7x^7+c_8x^8}{1+b_1x+b_2x^2+b_3x^3+b_4x^4+b_5x^5+b_6x^6+b_7x^7+b_8x^8}\right)$$

$$\overline{y}(x;r)=(320-20r)+x(0.2-0.2r)+\left(\frac{\overline{c}_0+\overline{c}_1x+\overline{c}_2x^2+\overline{c}_3x^3+\overline{c}_4x^4+\overline{c}_5x^5+\overline{c}_6x^6+\overline{c}_7x^7+\overline{c}_8x^8}{1+\overline{b}_1x+\overline{b}_2x^2+\overline{b}_3x^3+\overline{b}_4x^4+\overline{b}_5x^5+\overline{b}_6x^6+\overline{b}_7x^7+\overline{b}_8x^8}\right)$$

وبجعل الباقي صفراً في نقاط داخلية ضمن المنطقة وذلك وفقاً للطريقة التجميعية وبالتالي نضع :

$$\tilde{R}(0.0027777778,r)=0\quad,\tilde{R}(0.0194444444,r)=0\quad\tilde{R}(0.0361111111,r)=0$$
$$\tilde{R}(0.0055555556,r)=0\quad\tilde{R}(0.0222222222,r)=0\quad\tilde{R}(0.0388888889,r)=0$$
وينتج $\tilde{R}(0.0083333333,r)=0\qquad\tilde{R}(0.025,r)=0\qquad\tilde{R}(0.0416666667,r)=0$
$$\tilde{R}(0.0111111111,r)=0,\tilde{R}(0.0277777778,r)=0,\tilde{R}(0.0444444444,r)=0$$
$$\tilde{R}(0.0138888889,r)=0,\tilde{R}(0.0305555556,r)=0\ ,\tilde{R}(0.047222222,r)=0$$
$$\tilde{R}(0.0166666667,r)=0,\tilde{R}(0.0333333333,r)=0$$

لدينا 34 معادلة غير خطية بحلها نحصل على معاملات الحل الضبابي التجريبي

ومنه على الحل التجريبي $\overline{y}(x;r)$:

$$=(x,r)\rightarrow\left(0.00002000000000\left(4.728962393\,10^{76}r+6.620547350\,10^{77}-\right.\right.$$
$$9.013859690\,10^{78}x+2.211624165\,10^{81}x^2-2.905729146\,10^{82}x^3\cdot$$
$$+2.411985654\,10^{84}x^4$$
$$-2.957903091\,10^{85}x^5+3.571960992\,10^{86}x^6-1.630075267\,10^{87}x^7+$$
$$9.052606235\,10^{87}x^8+2.830845558\,10^{85}r\,x^6-1.276235941\,10^{86}r\,x^7\cdot$$
$$+7.126623108\,10^{86}r\,x^8$$
$$-1.698307320\,10^{87}r\,x^9+5.402058594\,10^{87}r\,x^{10}-7.583381713\,10^{87}r\,x^{11}+$$
$$1.424550947\,10^{88}r\,x^{12}-1.147490711\,10^{88}r\,x^{13}+1.150972824\,10^{88}r\,x^{14}$$
$$-4.247310386\,10^{87}r\,x^{15}+1.336192183\,10^{87}r\,x^{16}+1.577627942\,10^{80}r\,x^2\cdot$$
$$\left.-2.240067888\,10^{81}r\,x^3+1.729711069\,10^{83}r\,x^4-2.315412889\,10^{84}r\,x^5\right.$$

$$- 2.169154514\ 10^{88}\ x^9 + 6.850512026\ 10^{88}\ x^{10} - 9.685836294\ 10^{88}\ x^{11} + 1.808806219\ 10^{89}\ x^{12} - 1.465626761\ 10^{89}\ x^{13} + 1.456139690\ 10^{89}\ x^{14} - 5.424855909\ 10^{88}\ x^{15} + 1.895558451\ 10^{88}\ x^{16} - 7.238343972\ 10^{77}\ r\ x))/((2.174617758\ 10^{35} - 1.901602828\ 10^{36}\ x + 3.521187357\ 10^{38}\ x^2 + 3.668188899\ 10^{39}\ x^3 + 1.693010911\ 10^{40}\ x^4 + 4.551602344\ 10^{40}\ x^5 + 7.624712812\ 10^{40}\ x^6 + 7.651377000\ 10^{40}\ x^7 + 3.652801250\ 10^{40}\ x^8)\ (2.174617758\ 10^{35} + 1.901602828\ 10^{36}\ x + 3.521187357\ 10^{38}\ x^2 - 3.668188899\ 10^{39}\ x^3 + 1.693010911\ 10^{40}\ x^4 - 4.551602344\ 10^{40}\ x^5 + 7.624712812\ 10^{40}\ x^6 - 7.651377000\ 10^{40}\ x^7 + 3.652801250\ 10^{40}\ x^8))$$

و الحل التجريبي $\bar{y}(x;r)$:

$$= (x, r) \to -(0.0001000000000\ (-3.468702522\ 10^{86}\ r\ x^9 + 9.457924786\ 10^{75}\ r + 5.031614390\ 10^{87}\ x^9 - 1.589443364\ 10^{88}\ x^{10} + 2.246746046\ 10^{88}\ x^{11} - 4.196025953\ 10^{88}\ x^{12} + 3.399697280\ 10^{88}\ x^{13} - 3.379611376\ 10^{88}\ x^{14} + 1.258360475\ 10^{88}\ x^{15} - 4.333653916\ 10^{87}\ x^{16} + 2.092377859\ 10^{78}\ x - 2.099885025\ 10^{87}\ x^8 - 5.059197052\ 10^{80}\ x^2 + 6.737284838\ 10^{81}\ x^3 - 5.526067566\ 10^{83}\ x^4 + 6.861175415\ 10^{84}\ x^5 - 8.293326352\ 10^{85}\ x^6 + 3.781154732\ 10^{86}\ x^7 + 1.096696566\ 10^{87}\ r\ x^{10} - 1.548865448\ 10^{87}\ r\ x^{11} + 2.892045882\ 10^{87}\ r\ x^{12} - 2.343688847\ 10^{87}\ r\ x^{13} + 2.336642452\ 10^{87}\ r\ x^{14} - 8.674905937\ 10^{86}\ r\ x^{15} + 2.712664724\ 10^{86}\ r\ x^{16} - 1.490680347\ 10^{77}\ r\ x + 1.446808038\ 10^{86}\ r\ x^8 + 3.179731252\ 10^{79}\ r\ x^2 - 4.551518063\ 10^{80}\ r\ x^3 + 3.510455514\ 10^{82}\ r\ x^4 - 4.728813783\ 10^{83}\ r\ x^5 + 5.746978761\ 10^{84}\ r\ x^6 - 2.606639199\ 10^{85}\ r\ x^7 - 1.513267966\ 10^{77}))),$$

$$/((2.174617758\ 10^{35} - 1.901602828\ 10^{36}\ x + 3.521187357\ 10^{38}\ x^2 + 3.668188899\ 10^{39}\ x^3 + 1.693010911\ 10^{40}\ x^4 + 4.551602344\ 10^{40}\ x^5 + 7.624712812\ 10^{40}\ x^6 + 7.651377000\ 10^{40}\ x^7 + 3.652801250\ 10^{40}\ x^8)\ (2.174617758\ 10^{35} + 1.901602828\ 10^{36}\ x + 3.521187357\ 10^{38}\ x^2 - 3.668188899\ 10^{39}\ x^3 + 1.693010911\ 10^{40}\ x^4 -$$

$$4.551602344\ 10^{40}\ x^5 + 7.624712812\ 10^{40}\ x^6$$
$$- 7.651377000\ 10^{40}\ x^7 + 3.652801250\ 10^{40}\ x^8))$$

وبمقارنة الحل الضبابي الناتج عن طريقة التهجين مع طريقة غالركين [3] وذلك بحساب قيم الحل الضبابي عند نقاط ضمن المنطقة في كلتا الطريقتين وذلك من خلال الجدول التالي :

جدول (3):يبين قيم الحد الأدنى الناتج عن استخدام طريقة تهجين الطريقة التجميعية مع تقريبات بادي الكسرية وقيم الحد الأدنى الدقيق وقيم الحد الأدنى عن استخدام طريقة غالركين لحل المسألة السابقة من أجل r=0.6 :

x	$_y(t;r)$ باستخدام غالركين	$_\ y(t;r)$ باستخدام طريقة التهجين	$_Y(t;r)$ الحل الدقيق
0	292	292.0000001	291.999812
0.005	274.28	273.2959963	273.3228497
0.01	258.77	257.0384478	257.0811442
0.015	245.42	243.0724096	243.1121432
0.02	234.16	231.2502769	231.2760402
0.025	224.95	221.4446040	221.4543753
0.3	217.71	213.5526985	213.5488503
0.035	212.40	207.4945074	207.4803438
0.45	207.31	200.6562644	200.6292216
0.05	207.42	199.8090442	199.7780376

جدول (4):يبين قيم الحد الأعلى الناتج عن استخدام طريقة تهجين الطريقة التجميعية مع تقريبات بادي الكسرية وقيم الحد الأعلى الدقيق وقيم الحد الأعلى الناتج عن استخدام طريقة غالركين لحل المسألة السابقة من أجل r=0.6 :

x	$\bar{y}(t;r)$ باستخدام غالركين	$\bar{y}(t;r)$ باستخدام طريقة التهجين	$\bar{Y}(t;r)$ الحل الدقيق
0	308	308.000000	308.00010
0.005	289.20	288.1791474	288.1838887
0.01	272.74	270.94526112	270.9516686
0.015	258.58	256.1261122	256.1309740
0.02	246.64	243.5716936	243.5734739
0.025	236.86	233.1547999	233.1534891
0.3	229.18	224.7704797	224.7667326
0.035	223.55	218.3347111	218.3292671
0.45	218.15	211.0705517	211.0633598
0.05	218.27	210.1697514	210.1621984

نلاحظ من الجدولين السابقين أن قيم الحد الأدنى والأعلى في طريقة التهجين لتقريب بادي مع الطريقة التجميعية أقرب لقيم الحد الأدنى والأعلى للحل الدقيق منها عند استخدام طريق غالركين ومنه طريقة التهجين تعطي نتائج فعالة و دقيقة في حل مسائل قيم حدية ضبابية .

10. الاستنتاجات:

توصلت الدراسة إلى تهجين الطريقة التجميعية مع تقريبات بادي الكسرية لحل مسائل قيم حدية ضبابية وإعطائها نتائج قريبة من الحل الدقيق .

11. التوصيات:

استخدام طرق عددية وشبه عددية أخرى في حل مسائل قيم حدية ضبابية .

12. المراجع:

1. Oderinu, R.A.:Aregbesola Y.A.S., 2012-**Weighted Residual Method in a semi-infinite domain using an un-patitioned methods,**IJAM**,** 25(1), 25-31.
2. Oderinu, R.A, 2014-**On the Numerical Solution of Tenth and Twelfth Order Boundary Value Problems Using Weighted Residual Method (WRM) .**Gen.Math.Notes.24(1), 17-24.
3. Smita.T.; chakraverty. S.;Nieto. J. N,(2017),**Numerical solution of fuzzy boundary value problems using galerkin method,China**,42(1),45-61.
4. Jamshidi,L.;Avazpour,L,**Solution of the fuzzy boundary value differential equations under generalized differentiability by shooting method**.IRAN,(2012).
5. Mohammed,O. H.;Fadel,F.S,(2010)**The collocation method for solving nonhomogeneous fuzzy boundary value problems,Al-Nahrain university**,IRAQ,13(2),229-234.
6. Kharrat**,** B., 1977-**Quelques Methodes D'Approximation pour Le calcul De La somme Partielle D'une Serie Infinite,Diplome D'etudes approximations,**74.
7. Zimmerman, H. J., **"Fuzzy Set theory and its applications"**, Kluwer-Nijhcff publishing,USA,1988.
8. Dubois, D. and Prade, H., "**Fuzzy Sets and Systems**; Theory and Applications",Academic press,Inc.,1988.

9. B.Bede,L.Stefanini,2011,Solution of Fuzzy Differential Equations with generalized differentiability using LU-parametric representation,July,785.
10. Rini,Y.; Alyauma,H,(2018),**Numerical Solution of Nth-order Fuzzy Differential equations by Third Order Runge-Kutta Method Based on Combination of Arithmatics**, Harmonics and Geometrics Means,Applied Mathematics,pp:19-25.