

# حساب عاملي الصلابة والضعف من النتائج التجريبية للكابل المخمّد المستخدم في دراسة تخميد اهتزاز جهاز حساس معلق بجناح جسم طائر

عبد الرضى همام\*، أحمد المجيد\*\*

\*طالب دراسات عليا(ماجستير)، قسم هندسة الطيران، كلية الهندسة الميكانيكية، جامعة حلب

\*\* قسم هندسة الطيران، كلية الهندسة الميكانيكية، جامعة حلب

## المخلص

يعتبر الكابل المخمّد من المخمّدات غير الخطية ذات الفعالية الجيدة وخاصة في تخميد الأجهزة الحساسة مثل حالة اهتزاز كاميرا معلقة بجناح قمر صناعي. ومن خلال التجارب التي قام بها الباحث Guilhem MICHON في مختبر الهياكل بشركة Airbus حصل على نتائج تجريبية. ومن هذه النتائج قمنا برسم الحلقات التراجعية لكل حالة وأوجدنا باستخدام نموذج المجيد-ديفور Almajid -Dufour Model المعادلات الرياضية المثلى لمعاملي الصلابة والضعف المكافئين للكابل كتابعين للانتقال.

الكلمات المفتاحية: الاهتزازات، الكابل المخمّد، الحلقات التراجعية، عامل الصلابة، عامل الضعف.

**Hardness and Loss Factors Calculation of the  
Experimental Results of the Damped Cable Used in  
Study of Damping of Vibration in Sensitive Apparatus  
Attached to an Aircraft Wing**

**A. Hammam\*, A. Almajid\*\***

\*Postgraduate Student (MSc), Dept. of Aeronautic Mechanics, Faculty of  
Mechanical Engineering, University of Aleppo

\*\*Dept. of Aeronautic Mechanics, Faculty of Mechanical Engineering,  
University of Aleppo

**Abstract**

The damped cable is a good nonlinear damper, especially in the damping of sensitive devices such as the vibration of a camera suspended by a satellite wing. The experiments conducted by the researcher Guilhem MICHON in the Airbus Structures Laboratory obtained experimental results. From these results, we plotted the regression rings for each case and, using the Almajid - Dufour Model, we found the optimal mathematical equations for hardness and loss factors compatible with the cable.

**Keywords:** Vibrations, Wire Rope Isolator, Hysteresis Loop, Hardness factor, Loss factor.

Received 22 / 4 / 2018

Accepted 9 / 7 / 2018

**مقدمة:**

تعتبر ظاهرة الاهتزازات من أخطر الظواهر التي تؤثر في الأنظمة والمنشآت الهندسية بشكل عام وفي المنشآت الميكانيكية بشكل خاص ويعود السبب في ذلك إلى المخاطر الممكن وقوعها نتيجة لحادثة التجاوب أو ما يسمى بالطنين في أي لحظة نتيجة لتحريض المنشأة على أحد تردداتها الطبيعية.

ضمن هذا السياق ولدرء المخاطر المذكورة أعلاه الذي تستلزم، في حال وقوعها، إصلاحاً عالي الكلفة من جهة وتتسبب في ضياع لوقت توظيف الآلة من جهة أخرى، لابد من العمل على تخفيض سعة الاهتزاز للمنشأة قيد الدراسة إلى أدنى حد ممكن.

كما تتعرض التجهيزات والمنشآت العاملة في مجال الطيران والفضاء الى مستويات اهتزاز كبيرة، وهي تتطلب استقراراً عالياً لضمان فعالية أداء مهامها المختلفة،

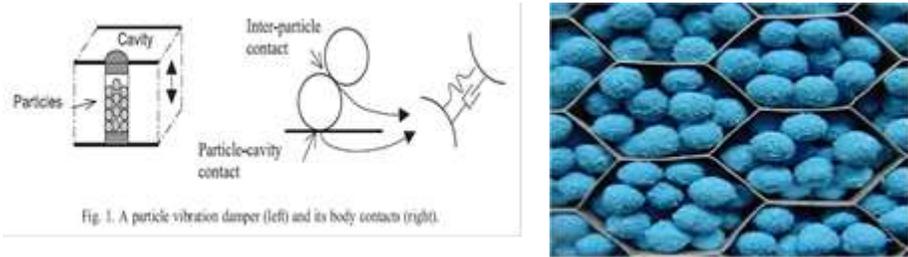
فمثلاً من أجل الأقمار الصناعية المستخدمة في الملاحة الجوية والتي يتم تثبيت كاميرات تصوير على أجنحتها، فإن أي انحراف بسيط للكاميرا سيؤدي إلى انحراف كبير عن الهدف المطلوب وذلك نتيجة للارتفاع الكبير للقمر الصناعي الذي يصل إلى 40000 m.



مما يفرض على المصممين التعمق في الدراسة الديناميكية لهذه المنشآت بهدف تأهيلها بشكل جيد للعمل ضمن مختلف الظروف.

ضمن هذا الإطار، يوجد عدد من الحلول التي يجري العمل عليها والتي هي قيد الدراسة من قبل مصممي وصانعي تلك الأجهزة.

فمثلاً درس الباحثون (G. Michon, A. Almajid and G. Aridon) [1] تخفيض سعة اهتزاز أجنحة القمر الصناعي المكونة من مواد مركبة وذلك بوضع كرات بلاستيكية على شكل حبيبات داخل خلايا النحل ضمن الجناح وينسب معينة كما هو موضح بالشكل (1.1) التي بدورها تلعب دور مخمد الاهتزازات.



الشكل (1.1) الحبيبات البلاستيكية داخل خلايا النحل

كما قام T. Zhou, S.J. Zhang, J. Li [2] باستخدام مجموعة رنديلات نابضية مجمعة موضحة بالشكل (1.2) أو نوابض حلقيّة للغاية ذاتها (تخفيض سعة الاهتزاز)



الشكل (1.2) رنديلات نابضية

وقام G. Wang [3] بدراسة تخميد اهتزاز الجوائز والصفائح ذات البنية الصندوقية.

وكذلك قام G. Michon [4] بدراسة تخميد الكابل المخمد الموضح بالشكل (1.3) (Wire Rope Isolator) المستخدم لتخميد اهتزازات الأجهزة الحساسة

المعلقة بجناح قمر صناعي، حيث قام بإجراء عدة تجارب في الحالة الستاتيكية على الكابل المخدم وحصل على قيم القوة-الانتقال لهذه التجارب.



الشكل (1.3) الكابل المخدم

كما قام كل من Almajid A., Dufour [5] بتطوير نموذج جديد لوصف السلوك الديناميكي لأنظمة الاخمد غير الخطية. وكذلك قام كل من [6] K.M. Mao, M.Y. Wang, H. Ding, T.N. و Chen و [7] Cai C, Zheng H, Khan MS, Hung KC بنمذجة اخمد المواد بطريقة العناصر المنتهية باستخدام برامج مثل Ansys. وقام كل من [8] Berthelot J-M و [9] Fasana A, Marchesiello بدراسة تحليل اخمد الجوائز بالطرق الرياضية باستخدام طريقة ريتز Ritz .

### أهمية البحث والهدف منه:

يعتبر التصوير الجوي والفضائي في الوقت الحالي من مصادر المعلومات المهمة جداً في المجال العسكري (دقة الاحداثيات وتحديد الأهداف) وفي المجال المدني (الطقس-علم الفلك....) لما تقدمه الصور من بيانات دقيقة ولحظية عن الأهداف المطلوبة وتوفره من زمن وكلفة مادية وبشرية.

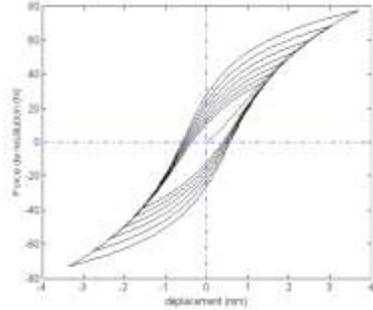
يتلخص الهدف في نقطة أساسية وهي القضاء ما أمكن على الاهتزازات التي تنتقل من جناح جسم طائر (قمر صناعي) إلى جهاز ما (آلة التصوير) مرتبط به، وذلك بهدف الحصول على الدقة اللازمة والصور المطلوبة، باستخدام الكابل المخدم. ومن أجل القضاء على الاهتزازات التي تمثل أحد الظواهر الخطيرة جداً في مجال العلوم الهندسية وخاصة في مجال انشاءات الطيران والفضاء تستخدم بشكل عام الأنظمة الخطية مع مخدمات أو الأنظمة اللاخطية التي يوصف سلوكها

الديناميكي بحلقات تراجعية موضحة بالشكل (1.4) تمثل المرونة والإخماد في الوقت نفسه.

والكابل المخمد Wire Rope Isolator الموضح بالشكل (1.5) الذي ستم دراسته في بحثنا هذا يمثل أحد هذه الأنظمة اللاخطية.



الشكل (1.5) الكابل المخمد



الشكل (1.4) شكل الحلقة التراجعية

طريقة البحث:

## 1 معالجة النتائج التجريبية للكابل المخمد

تمت نمذجة سلوك الكابل المخمد (العلاقة بين القوة -الاستطالة) باستخدام نموذج Almajid -Dufour Model لوصف الحلقات التراجعية في الأنظمة المخمدة غير الخطية.

### 1.1 تعريف نموذج Almajid - Dufour:

يعرف هذا النموذج بالمعادلة التفاضلية التالية:

$$\dot{R} = \beta \dot{d} \left[ h - R \operatorname{sgn}(\dot{d}) \right], \quad (1-1)$$

حيث:

$\beta$ : ثابت يتعلق بمساحة الحلقة وبالتالي فإنه يعبر عن الإخماد الذي تقدمه الحلقة (مساحة أكبر تعني إخماد أكبر)  $h$ : تابع يتعلق بالمنحنيات المغلفة للحلقة (منحني علوي ومنحني سفلي) ومعادلته:

$$h = \frac{1}{2} (h_u - h_l) - \frac{1}{2} (h_u - h_l) \operatorname{sgn}(\dot{d}), \quad (1-2)$$

حيث:

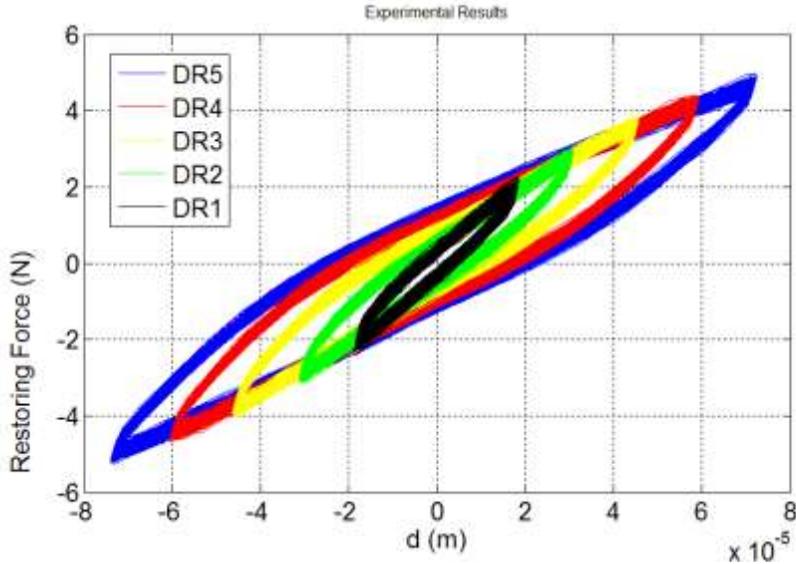
$h_u$ : المنحني العلوي للحلقة،  $h_l$ : المنحني السفلي للحلقة.

$\text{sgn}(\dot{d})$ : إشارة السرعة.

## 1.2 النتائج التجريبية:

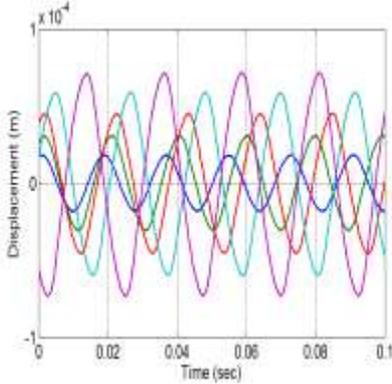
قام الباحث Guilhem MICHON بتنفيذ دراسة تجريبية في مخبر الهياكل لشركة Airbus على كابل مخدم وحصل على خمس مجموعات من النتائج التجريبية هي  $DR_5, DR_4, DR_3, DR_2, DR_1$  مرسومة بالشكل (1.6) حيث قام بتطبيق قوة على الكابل عشرات المرات وقياس الانتقال من أجل المجموعة الاولى من النتائج التجريبية ومن ثم زاد قيمة القوة المطبقة وكرر التجربة وحصل على مجموعة النتائج التجريبية الثانية ثم زاد القوة المطبقة وحصل على مجموعة النتائج التجريبية الثالثة وهكذا ....

يعتبر الكابل المخدم من المخدمات غير الخطية، حيث نلاحظ أنه كلما زادت القوة المطبقة زادت الاستطالة المقابلة وبالتالي نقص ميل المستقيم الواصل بين بداية ونهاية الحلقة التراجعية مما يؤدي الى انخفاض صلابة الكابل المخدم، أما في المخدمات الخطية فلا تتغير الصلابة بتغير مطالات الاهتزاز.

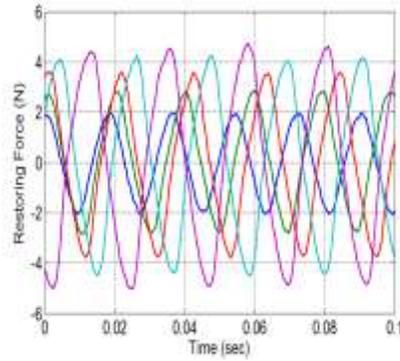


الشكل (1.6) النتائج التجريبية

قمنا برسم مخطط القوة مع الزمن كما في الشكل (1.7) ومخطط الانتقال مع الزمن كما في الشكل (1.8) لكل مطال اهتزاز لمجموعات النتائج التجريبية  $DR_5, DR_4, DR_3, DR_2, DR_1$  خلال 0.1 من الثانية فقط للتوضيح علماً أن الزمن الحقيقي لإجراء كل تجربة هو 10 ثوان):



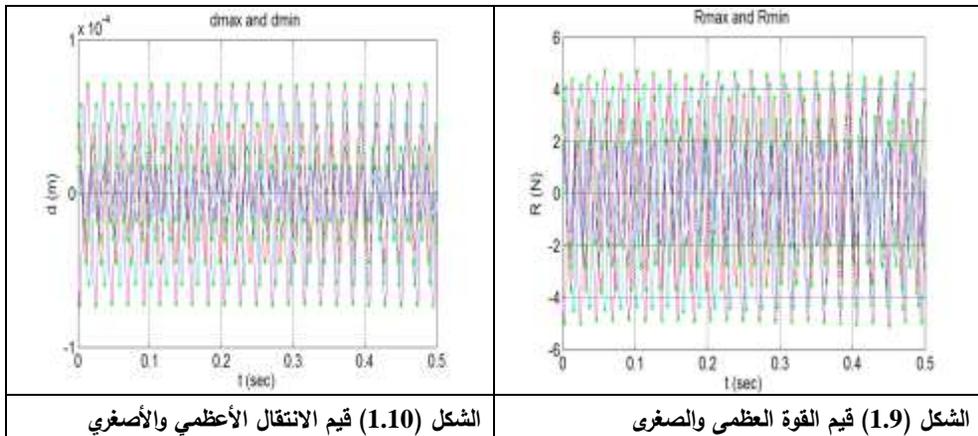
الشكل (1.8) مخطط انتقال-زمن



الشكل (1.7) مخطط قوة-زمن

### 1.3 ايجاد الحلقات التراجعية:

1. أوجدنا من مخطط (قوة - زمن) و (انتقال - زمن) قيم القوة العظمى  $R_{max}$  والصغرى  $R_{min}$  كما في الشكل (1.9) وكذلك قيم الانتقال الأعظمي  $d_{max}$  والأصغري  $d_{min}$  كما في الشكل (1.10) لكل حالة من حالات الاختبار (الشكل خلال نصف ثانية فقط للتوضيح) وذلك باستخدام برنامج Matlab.



2. أوجدنا باستخدام طريقة المربعات الصغرى المنحني الأمثل بين النقاط  $d_{\min}, d_{\max}, R_{\min}, R_{\max}$  الذي يعبر عن الحلقة التراجعية لكل حالة حيث كان المنحني الأمثل هو عبارة عن تقاطع كثيري حدود من المرتبة الرابعة هما:

$$R_{lower} = C_l \cdot D_l \quad (1-3)$$

$$R_{upper} = C_u \cdot D_u, \quad (1-4)$$

حيث:

$R_{upper}$ : يمثل الجزء العلوي من الحلقة.

$R_{lower}$ : ويمثل الجزء السفلي الحلقة.

$$C_u = \{c_0 \ c_1 \ c_2 \ c_3 \ c_4\}_u$$

$$C_l = \{c_0 \ c_1 \ c_2 \ c_3 \ c_4\}_l$$

$$D_u = D_l = \{1 \ d \ d^2 \ d^3 \ d^4\}^T$$

$C_u$  و  $C_l$  تمثلان مصفوفتي ثوابت المنحنيين العلوي والسفلي على الترتيب

للحلقة التراجعية.

$D_u$  و  $D_l$  تمثلان مصفوفتي متحول المنحنيين العلوي والسفلي على الترتيب

للحلقة التراجعية وهو الانتقال.

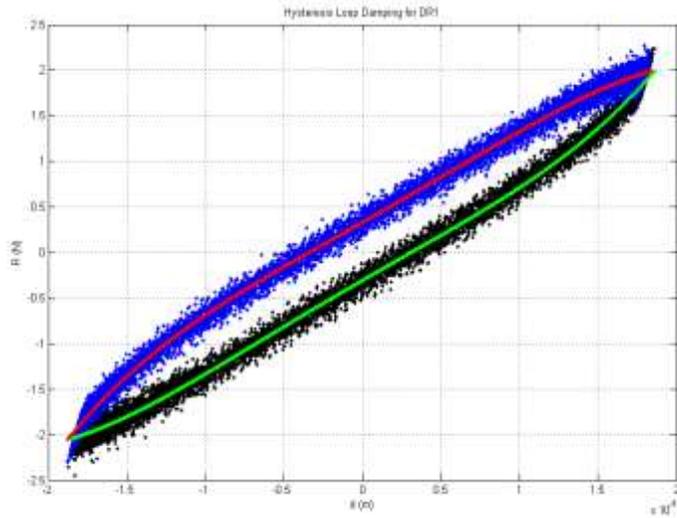
• من أجل مجموعة النتائج التجريبية الأولى  $DR_1$ :

كانت ثوابت المعادلتين  $C_{l1}, C_{u1}$  هي:

$$C_{u1} = \{0.3305 \ 9.7824e^4 \ 2.4963e^8 \ 2.9438e^{13} \ -3.5564e^{18}\}$$

$$C_{l1} = \{-0.3067 \ 9.9690e^4 \ -3.8795e^8 \ 2.5550e^{13} \ 3.4447e^{18}\}$$

والمنحني الأمثل للحلقة التراجعية كما في الشكل (1.11)



الشكل (1.11) من أجل DR1

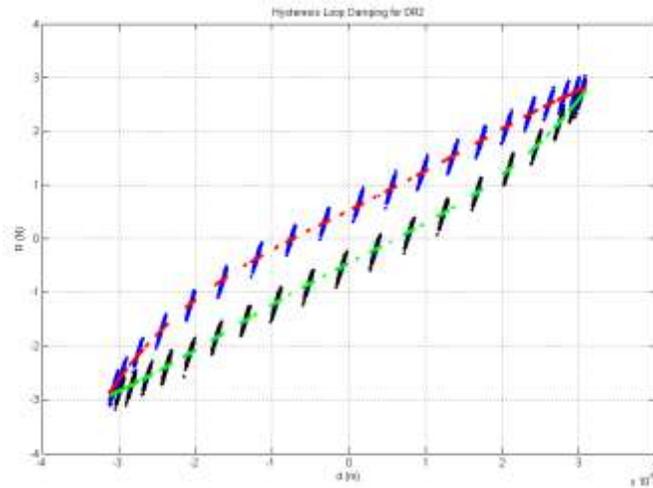
• من أجل مجموعة النتائج التجريبية الثانية  $DR_2$ :

كانت ثوابت المعادلتين  $C_{u2}$ ,  $C_{12}$  هي:

$$C_{u2} = \{ 0.5273 \quad 7.1563e^4 \quad 7.8140e^7 \quad 2.0191e^{13} \quad -6.5147e^{17} \}$$

$$C_{12} = \{ -0.4527 \quad 7.4240e^4 \quad -2.4013e^8 \quad 1.8252e^{13} \quad 6.7739e^{17} \}$$

والمنحني الأمثل للحلقة التراجعية كما في الشكل (1.12)



الشكل (1.12) من أجل DR2

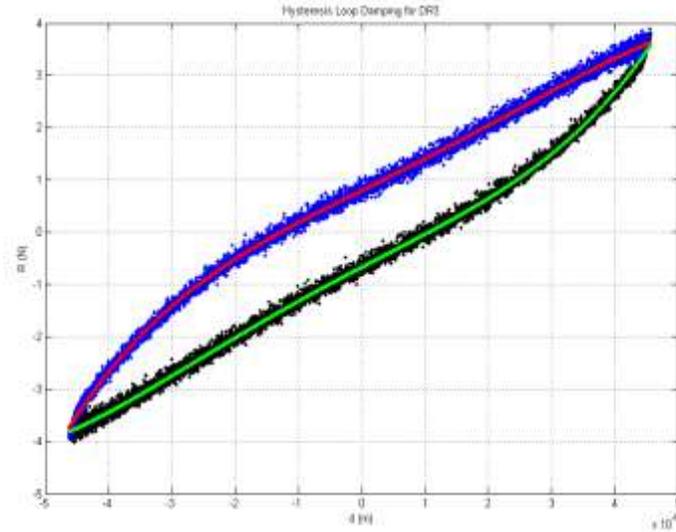
• من أجل مجموعة النتائج التجريبية الثالثة  $DR_3$ :

كانت ثوابت المعادلتين  $C_{u3}, C_{l3}$  هي:

$$C_{u3} = \{ 0.7973 \quad 6.0227e^4 \quad -9.2592e^6 \quad 9.2470e^{12} \quad -1.7788e^{17} \}$$

$$C_{l3} = \{ -0.6694 \quad 6.3341e^4 \quad -1.2051e^8 \quad 8.2866e^{12} \quad 1.8749e^{17} \}$$

والمنحني الأمثل للحلقة التراجعية كما في الشكل (1.13)



الشكل (1.13) من أجل  $DR_3$

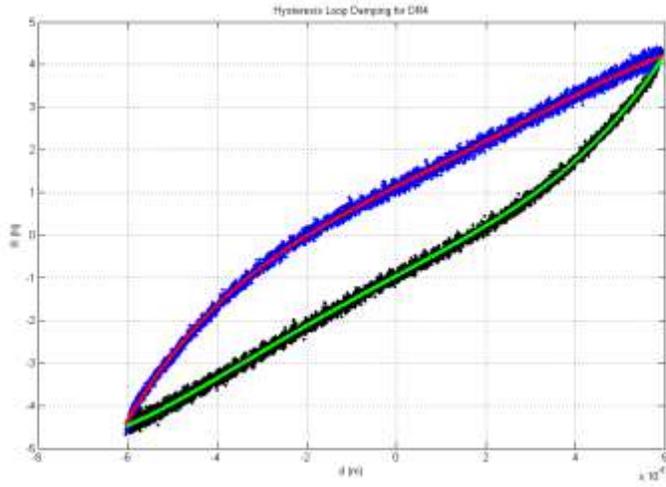
• من أجل مجموعة النتائج التجريبية الرابعة  $DR_4$ :

كانت ثوابت المعادلتين  $C_{u4}, C_{l4}$  هي:

$$C_{u4} = \{ 1.1412 \quad 5.3394e^4 \quad -9.2250e^7 \quad 4.9854e^{12} \quad -6.6546e^{16} \}$$

$$C_{l4} = \{ -0.9519 \quad 5.6720e^4 \quad -1.6374e^7 \quad 4.3937e^{12} \quad 6.9566e^{16} \}$$

والمنحني الأمثل للحلقة التراجعية كما في الشكل (1.14)



الشكل (1.14) من أجل DR4

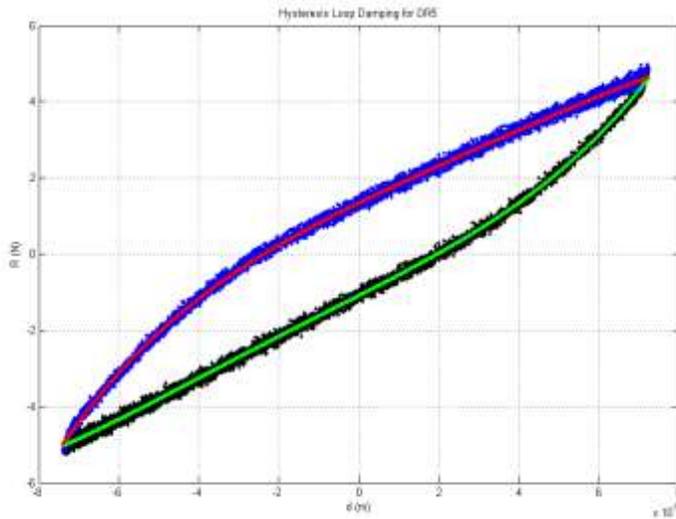
• من أجل مجموعة النتائج التجريبية الخامسة  $DR_5$ :

كانت ثوابت المعادلتين  $C_{u5}$ ,  $C_{l5}$  هي:

$$C_{u5} = \{ 1.3448 \quad 5.1079e^4 \quad -1.5421e^8 \quad 2.6354e^{12} \quad -2.1418e^{16} \}$$

$$C_{l5} = \{ -1.0859 \quad 5.3740e^4 \quad 4.3761e^7 \quad 2.3731e^{12} \quad 2.5140e^{16} \}$$

والمنحني الأمثل للحلقة التراجعية كما في الشكل (1.15)



الشكل (1.15) من أجل DR5

#### 1.4 إيجاد عاملي الصلابة ( $K_{eq}$ ) والضياع ( $\eta_{eq}$ ) المكافئين للكابل:

. استخدمنا معادلة نموذج Almajid-Dufour لتوصيف الحلقات التراجعية

ولحساب  $\eta_{eq}$ ,  $K_{eq}$  من خلال العلاقات التالية:

$$\eta_{eq} = \frac{R_3 - R_4}{R_1 - R_2} \quad (1-5)$$

$$K_{eq} = \frac{R_1 - R_2}{d_1 - d_2} \quad (1-6)$$

لكي نبقي في مجال المعادلات التفاضلية الخطية وذلك لسهولة التعامل معها

وحلها.

في دراستنا للكابل المخمّد:

$K_{eq}$  تعبر عن الصلابة المكافئة للكابل المخمّد، بينما  $\eta_{eq}$  تعبر عن عامل

الضياع المكافئ وهو يرتبط بثابت الإخماد المكافئ وفق العلاقة:

$$C_{eq} = \eta_{eq} \cdot m \cdot \omega_n \quad (1-7)$$

حيث:  $m$  الكتلة و  $\omega_n$  التردد الطبيعي.

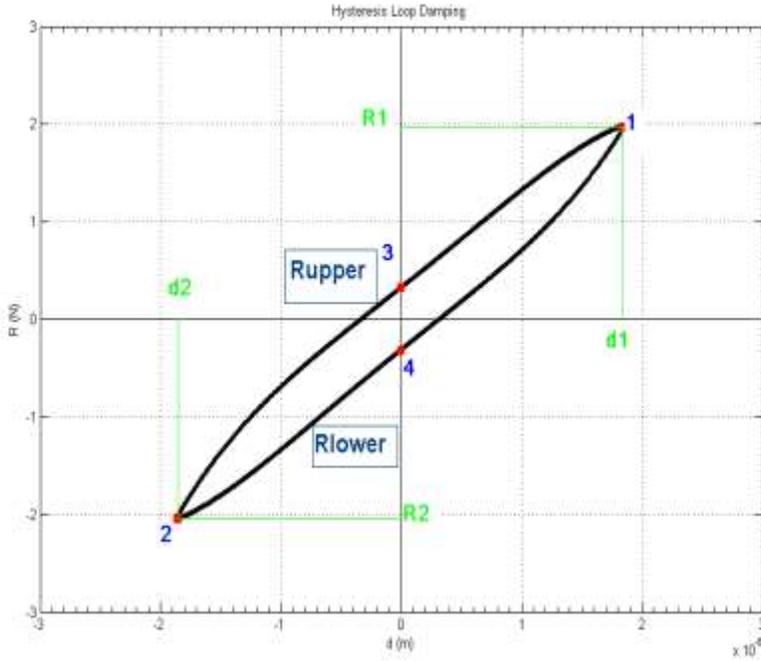
وقمنا بحساب كل من النقاط  $R_1, R_2, d_1, d_2, R_3, R_4$  كما يلي ووفقاً

للشكل (1.16):

$$R_{upper} = R_{lower} \rightarrow d_1 \ \& \ d_2$$

$$d_1 \ \& \ d_2 \rightarrow R_{upper} \ \text{or} \ R_{lower} \rightarrow R_1 \ \& \ R_2$$

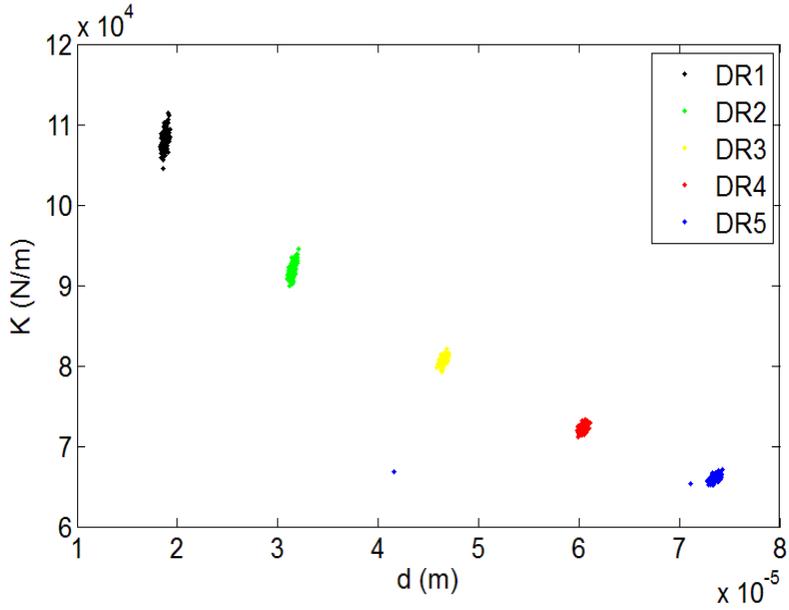
$$d = 0 \rightarrow R_{upper} \ \& \ R_{lower} \rightarrow R_3 \ \& \ R_4$$



الشكل (1.16) شكل نموذج الحلقة التراجعية

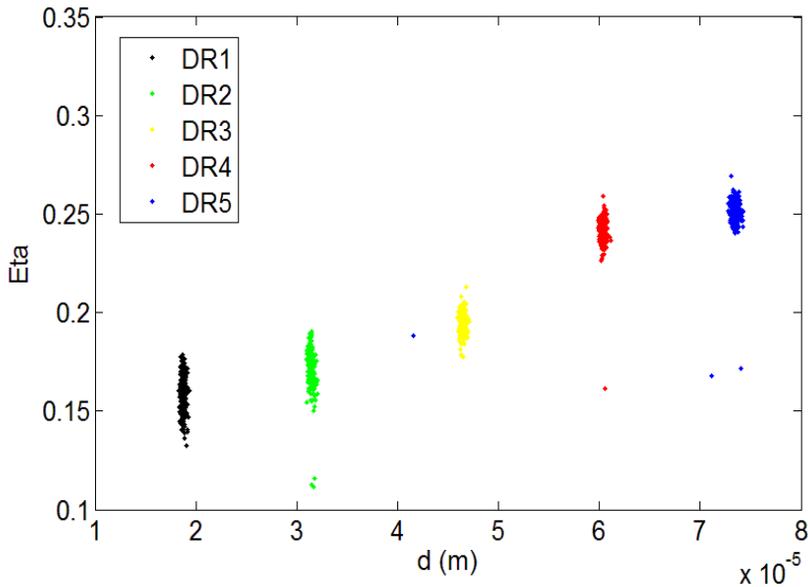
### النتائج والمناقشة:

من النتائج التجريبية  $DR_5, DR_4, DR_3, DR_2, DR_1$  ولأجل كل مطال اهتزاز: قمنا بتطبيق برنامج باستخدام Matlab لحساب كل من  $\eta_{eq}$ ,  $K_{eq}$  من أجل عدة قراءات متتالية (في المطال الواحد) فحصلنا على عدة قيم لكل من  $\eta_{eq}$ ,  $K_{eq}$  كتابع من الانتقال الوسطي  $\bar{d}$ .  
والأشكال (1.17) و (1.18) توضح العلاقة بين  $K_{eq}$ ,  $\bar{d}$  وكذلك بين  $\eta_{eq}$ ,  $\bar{d}$  على التوالي:



الشكل (1.17) العلاقة بين عامل الصلابة والانتقال الوسطي

نلاحظ من خلال الشكل أنه كلما زاد مطال الاهتزاز انخفضت صلابة الكابل (العلاقة عكسية) وتقترب الصلابة من قيمتها الدنيا عند أكبر مطال للاهتزاز.



الشكل (1.18) العلاقة بين عامل الضياع والانتقال الوسطي

نلاحظ من الشكل أن عامل الضياع  $\eta_{eq}$  يزداد تدريجياً مع ازدياد مطال الاهتزاز حتى يبلغ قيمة عظمى ثم بعد ذلك يبدأ بالتناقص التدريجي. باستخدام طريقة المربعات الصغرى نوجد معادلة المنحني الأمثل لقيم

الصلابة  $K$  وكان شكل المنحني:

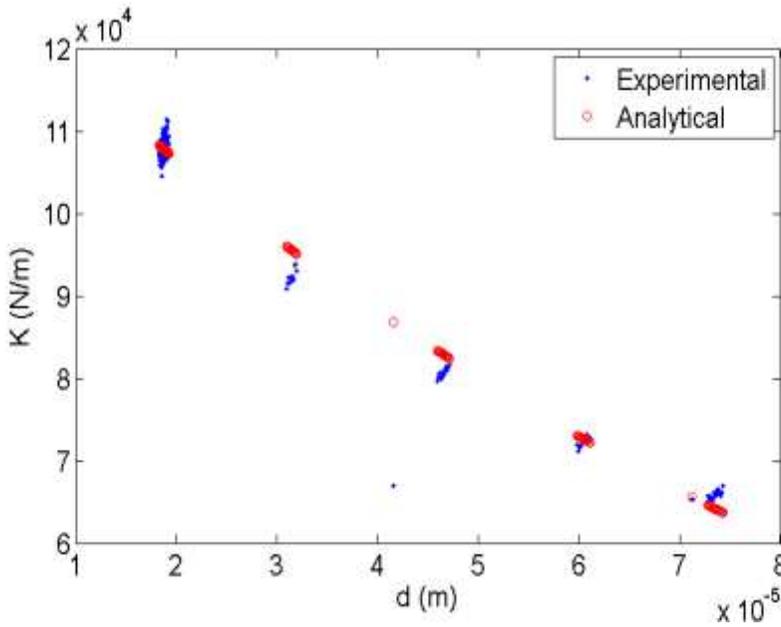
$$K = 128800 e^{-9475.6.d} \quad (1-8)$$

حيث:  $d : m$  ,  $K : N / m$

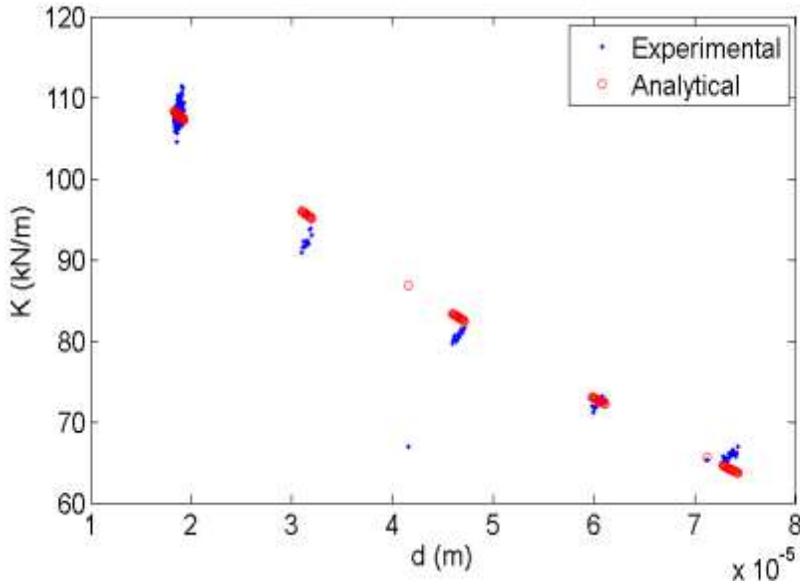
$$K = 128.8 e^{-9475.6.d} \quad (1-9)$$

حيث:  $d : m$  ,  $K : kN / m$

وبرسم المنحني كما في الشكلين (1.19) و (1.20) مع القيم التجريبية نلاحظ مدى تطابق المنحني مع القيم التجريبية.



الشكل (1.19) منحني عامل الصلابة كتابع من الانتقال



الشكل (1.20) منحنى عامل الصلابة كتابع من الانتقال

أما شكل منحنى عامل الضياع  $\eta_{eq}$  فكانت معادلته من الشكل:

$$\eta_{eq} = \eta_{mean} \cdot X_{mean}^{(-X_{max} \cdot m)} \cdot d^{(X_{max} \cdot m)} \cdot e^{-m(d - X_{mean})} \quad (1-10)$$

وبحساب الثوابت:

$$X_{mean} = 6e^{-5}, \quad X_{max} = 4e^{-4}$$

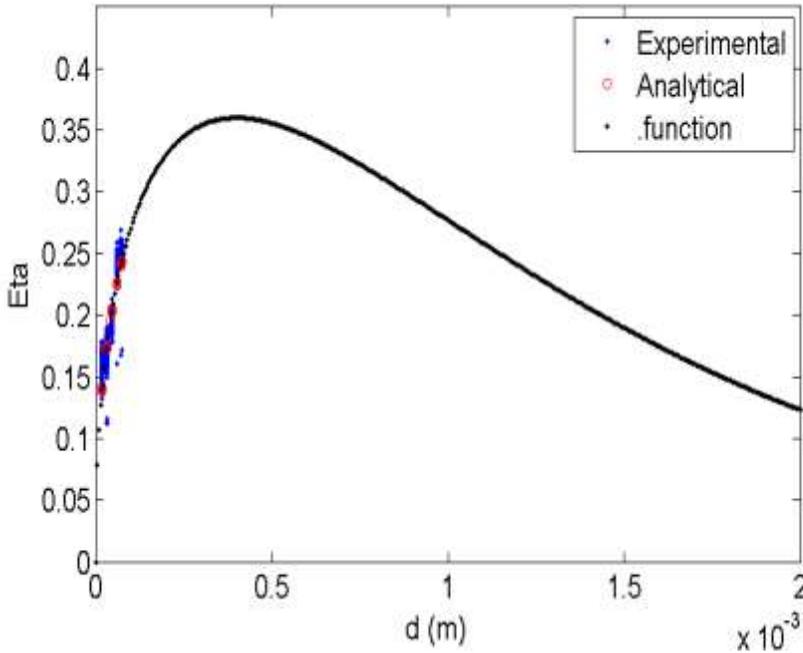
$$\eta_{mean} = 0.225, \quad \eta_{max} = 0.36$$

$$m = - \left( \frac{\log(\eta_{mean}/\eta_{max})}{X_{max} \cdot \log(X_{max}/X_{mean}) - (X_{max} - X_{mean})} \right) = 1122.1$$

يصح شكل المعادلة:

$$\eta_{eq} = 17.6651d^{(0.4488)} e^{(-1122.1d + 0.0673)}, \quad d : m \quad (1-11)$$

ويرسم العلاقة ومقارنتها مع القيم التجريبية نحصل على الشكل (1.21) كما يلي:



الشكل (1.21) منحنى عامل الضياع كتابع من الانتقال

نلاحظ أن منحنى عامل الضياع  $\eta_{eq}$  يزداد تدريجياً مع ازدياد مطال الاهتزاز حتى يبلغ قيمة عظمى ثم بعد ذلك يبدأ بالتناقص التدريجي ويقترّب من الصفر في اللانهاية. وأن القيم التجريبية منطبقة بشكل كبير على المنحني.

#### الاستنتاجات:

بعد إيجاد معادلتى معاملي الصلابة (1.8) والضياع (1.11) المكافئين

للكابل المخمد  $K_{eq}$ ,  $\eta_{eq}$  كتابعين للانتقال  $\bar{d}$ :

1. هذه العلاقات ناتجة عن تطبيق طريقة المربعات الصغرى على النتائج التجريبية حيث أن التجربة أجريت على الكابل موضوع دراستنا وفي رأينا تصلح هذه العلاقات فقط لهذا النوع من المخمدات المبين بالشكل (1.5) Wire Rope Isolator (شكلاً وبنية)

2. يمكن استخدام هذه العلاقات لاحقاً في دراسة السلوك الديناميكي للكابل، لكن بسبب صعوبة التعامل مع معاملي الصلابة والضياع كمعادلات يمكن للتسهيل

ومن خلال النتائج التجريبية التي تم الحصول عليها والمنحنيات الرياضية المكافئة التي رسمناها إيجاد قيم وسطية ثابتة للمعاملين كون أن تغيراتهما ضمن مجال الدراسة تكاد تكون خطية.

3. يمكن تطبيق هذه النتائج على هذا النوع من المخمدرات الذي يمكن استخدامه أيضاً في مجال الصناعات الدفاعية والطيران والصناعات الطبية وكذلك يستخدم بفعالية في العزل الزلزالي وكذلك خلال نقل وتشغيل أجهزة إلكترونية حساسة تحت تأثير ظروف بيئية وميكانيكية قاسية ومعقدة وغيرها.

### References

- [1] G. Michon, A. Almajid and G. Aridon 2013 Journal of Sound and Vibration 332(3) 536-544 . Soft Hollow Particle Damping Identification in Honeycomb Structures.
- [2] T. Zhou, S.J. Zhang, J. Li, Study on isolation project of electronic devices, J. Exp. Mech. 21 (3) (2006) 1–6 (in Chinese).
- [3] G. Wang, Analysis of sandwich beams and plates with viscoelastic cores, Ph.D. dissertation, Department of Aerospace Engineering, University of Maryland, College Park, MD, 2001.
- [4] G. Michon, A. Almajid, J.F. Ferrero, G. Aridon, V. Fascio, J.P. Heurteau, “dissipation mechanisms identification of soft hollow particle-dampers, in honeycomb structures for micro-vibrations environment”, 11th ECSSMMT, European Conference On Spacecraft Structures Materials & Mechanical Testing, 15-17 september 2009, CNES ESA DLR, Toulouse-France
- [5] Almajid A., Dufour R., 2002, *Nonlinear Dynamics*, 27, 69-85 Formulation of a hysteresis restoring force model. Application to vibration isolation.
- [6] K.M. Mao, M.Y. Wang, H. Ding, T.N. Chen, Simulation and characterization of particle damping in transient vibrations, ASME J. Vib. Acoust. 126 (2) (2004) 202– 211.
- [7] Cai C, Zheng H, Khan MS, Hung KC. Modeling of Material Damping Propertie in ANSYS, ANSYS 2002 Users Conference and Exhibition. April 22–24 2002.
- [8] Berthelot J-M. Damping analysis of laminated beams and plates using the Ritz method. Compos Struct 2006; 74:186–201.
- [9] Fasana A, Marchesiello S. Rayleigh-Ritz analysis of sandwich beams. J Sound Vib 2001;241(4):643–652.