دراسة حول بعد كرول لحلقات الجداء الديكارتي وحلقات الزمر

محمد داوود جلبي*، صفوان عويرة**

*طالب دراسات عليا(ماجستير)، قسم الرياضيات، كلية العلوم، جامعة حلب

**أستاذ، قسم الرياضيات، كلية العلوم، جامعة حلب

ملخص

استطعنا في هذا البحث اثبات ما يلي :

1- إذا كان f إيزومورفيزم حلقات بين حلقتين S و R وكان بعد كرول للحلقتين السابقتين منته ،فإن $\dim R = \dim S$.

2- إذا كانت T و R حلقتين ،و $S = R \times T$ حلقة الجداء الديكارتي لهما ،عندئذٍ يوجد إيزومورفيزم حلقات بين الحلقتين $S[x_1, x_2, \dots, x_n]$ و $R[x_1, x_2, \dots, x_n] \times T[x_1, x_2, \dots, x_n]$.

3- استنتجنا أنه إذا كانت T و R حلقتين ،و $S = R \times T$ حلقة الجداء الديكارتي لهما ،عندئذٍ:

$$\dim(S[x_1, x_2, \dots, x_n]) = \dim(R[x_1, x_2, \dots, x_n] \times T[x_1, x_2, \dots, x_n])$$

4- أثبتنا أنه إذا كانت T و R حلقتي جفارد ،عندئذٍ حلقة الجداء الديكارتي $S = R \times T$ هي حلقة جفارد.

5- اثبتنا أنه إذا كانت A حلقة بحيث $\dim A$ منته ،و G زمرة منتهية التوليد عدد مولداتها هو r و $R = A[G]$ فإن:

أ- $\dim R \geq \dim A + r$ وفي حالة A حلقة جفارد تتحقق المساواة.

ب-إذا كانت A حلقة جفارد فإن R تكون حلقة جفارد ايضاً.

الكلمات المفتاحية: حلقة الزمر ،حلقة الجداء الديكارتي ، حلقة جفارد ،بعد كرول.

ورد البحث للمجلة بتاريخ 9/26 / 2022

قبل للنشر بتاريخ 4/ 12/ 2022

1.مقدمة [1]:

يعد بعد كرول هو البعد الأساسي في المراجع بالنسبة للحلقات ،لأنه المفهوم المقابل للبعد في الهندسة الفراغية والبعد الطبولوجي. إن مفهوم البعد له أهمية كبيرة في نظرية الحلقات والحقول و الهندسة الجبرية و التبولوجيا الجبرية. وحاول العلماء في العقود الماضية وضع تعريف للبعد في الحلقات من أجل تمييز الحلقات بحسب بعدها.

ظهر تعريف البعد للفضاء الطبولوجي في عام 1912 بواسطة العالم براور J.W. Brewer ، ومن ثم قُدّم مفهوم بعد كرول لأول مرة عام 1937 على يد العالم ولف جانج كرول Wolfgang Krull الذي كان نظير المفهوم الطبولوجي للبعد في نظرية الحلقات. ميزَّ مفهوم البعد في الهندسة بين الفضاءات الأقليدية، فاللمستقيم بعد واحد وللمستوي بعدان وللفراغ ثلاثة أبعاد وهكذا ......،اهتم العالم الفرنسي جفارد Jaffard بدراسة الحلقات التي تحقق أن بعد كرول لحلقة كثيرة الحدود لحلقة ما بالنسبة لـ n متحول يساوي الى بعد كرول لتلك الحلقة مضاف إليه العدد n.
سنحاول في هذا البحث دراسة بعض الحلقات التي تحقق الشرط السابق والتي سميت بحلقة جفارد.

2.تعاريف أساسية:

ملاحظة: كلمة حلقة نعني بها حلقة تبديلية ذات عنصر واحدة.

2−1.تعريف [2] (ideal): لتكن R حلقة، ولتكن $\emptyset \neq P \subseteq R$ مجموعة جزئية غير خالية من R، يقال عن P إنها مثالية في R إذا حققت:

$$\forall a,b \in P \ \Rightarrow a-b \in P \ \ \& \ \forall r \in R, b \in P \Longrightarrow rb = br \in P$$

ويقال عن مثالية P إنها فعلية إذا كان $P \neq R$.

2−2.تعريف [2] (prime ideal): لتكن R حلقة، ولتكن P مثالية في R. يقال عن P إنها مثالية أولية في R، إذا حققت:

$$\forall a,b \in R\, ; ab \in P \ \Rightarrow \ a \in P \ \ or \ \ b \in P$$

وسنرمز لمجموعة جميع المثاليات الأولية في الحلقة R بـ$Spes(R)$.

2−3. تعريف [1] **(high of prime ideal):** لتكن R حلقة، ولتكن P مثالية أولية في R. يعرّف مستوى المثالية الأولية P والذي يرمز له بـ $ht(P)$ بأنه الحد الأعلى الأصغري لأطوال سلاسل المثاليات الأولية الفعلية والمختلفة من R و المحتواة في P، فإذا كانت P من المستوى k، فتوجد سلسلة متناقصة من المثاليات الأولية الفعلية والمختلفة من R و المبتدئة بـ P من الشكل:

$$P = P_0 \supset P_1 \supset P_2 \supset \cdots \supset P_k$$

ولا يوجد سلسلة أطول منها.

2−4. تعريف [3] **(Krull dimension):** لتكن R حلقة. يعرّف بعد كرول للحلقة R ،ويرمز له بـ $\dim R$ ،بأنه:

$$\dim(R) = sup\{ht(P); p \in Spes\ (R)\}$$

2−5.تعريف [4] **(Jaffard ring):** لتكن R حلقة. يقال عن الحلقة R إنها حلقة جفارد إذا حققت الشرط :

$$\dim(R[x_1, x_2, \dots, x_n]) = n + \dim(R)$$

حيث $\dim(R)$ هو بعد كرول للحلقة R .

مثال[1]: كل حقل هو حلقة جفارد ،لأنه إذا كان K حقلاً ،فإن $\dim(K[x_1, x_2, \dots, x_n]) = n + \dim(K)$.

2−6. تعريف [5] **(group ring) :** لتكن A حلقة، ولتكن G زمرة . إن حلقة الزمر للزمرة G فوق الحلقة A ،التي يرمز لها بالرمز $A[G]$ ،هي مجموعة جميع المجاميع من الشكل:

$$\sum_{g \in G} f(g)g \ ; f(g) \in A$$

وحيث إن f تطبيق من G إلى A و دعامة f التي هي المجموعة $Supp(f) = \{g \in G \ ; \ f(g) \neq 0\}$ هي مجموعة منتهية ، مع العمليتين الثنائيتين الآتيتين :

$$\sum_{g \in G} f(g)g + \sum_{g \in G} h(g)g = \sum_{g \in G} (f(g) + h(g))g$$

$$\left(\sum_{g\in G} f(g)g\right)\left(\sum_{g\in G} h(g)g\right)=\sum_{g\in G} v(g)g \quad ;$$
$$v(g)=\sum_{t\in G} f(t)\,h(t^{-1}g)=\sum_{g=xy} f(x)h(y)$$

يجدر بنا أن نشير إلى أن :

$$\sum_{g\in G} f(g)g=\sum_{g\in G} h(g)g \Leftrightarrow f(g)=h(g), \forall g\in G$$

2−7. تعريف [6] (Cartesian product ring)**:** لتكن T و R حلقتين , تعرف حلقة الجداء الديكارتي للحلقتين R بـ T والتي يرمز لها بالشكل $R\times T$ بأنها المجموعة :

$$\{(x,y); x\in R\ , \qquad y\in T\}$$

تحت عمليتي الجمع والضرب الاتيتين :

$$(x_1,y_1)+(x_2,y_2)=(x_1+x_2,y_1+y_2)$$
$$(x_1,y_1).(x_2,y_2)=(x_1.x_2,y_1.y_2)$$

ويعرف تساوي عنصرين في حلقة الجداء الديكارتي بـ:

$$(x_1,y_1)=(x_2,y_2)\Leftrightarrow x_1=x_2\ \&\ y_1=y_2$$
$$\forall x_1,x_2\in R, y_1,y_2\in T$$

3.مبرهنات أساسية:

3−1.مبرهنة[5]: لتكن R حلقة ،ولتكن G زمرة دائرية ،عندئذٍ يوجد إيزومورفيزم بين الحلقتين $R[G]$ و $R[x]$.

3−2.مبرهنة [1]: لتكن R حلقة. ولنفرض أن $\dim R=k$ ،عندئذٍ :

$$k+1\le \dim[R(x)]\le 2k+1$$

4.نتائج البحث:

4-1.ملاحظة: لتكن T و R حلقتين , ولتكن $S=R\times T$ حلقة الجداء الديكارتي لهما , عندئذٍ كل مثالية أولية من S هي من الشكل $I\times T \quad or \quad R\times J$ ،حيث إن I و J هما مثاليتان أوليتان من R و T على الترتيب .

2−4.تمهيدية: لتكن T و R حلقتين , ولتكن $S = R \times T$ حلقة الجداء الديكارتي لهما ، عندئذٍ :

$$\dim S = \max\{\dim R\ , \dim T\}$$

البرهان: نعلم أن بعد كرول لحلقة ما هو عدد صحيح موجب (هو طول سلسلة متناقصة من مثاليات أولية فعلية ومختلفة) ،ومنه إما $\dim R \geq \dim T$ أو العكس.

إذا كان $\dim R \geq \dim T$ ،فإن $\dim R = \max\{\dim R\ , \dim T\}$.لنبرهن أن $\dim S = \dim R$.لنفرض أن $\dim R = n$ ،عندئذٍ توجد في R سلسلة متناقصة من المثاليات الأولية الفعلية والمختلفة طولها n ولا توجد سلسلة أطول منها ولتكن فرضاً السلسلة $I_0 \supset I_1 \supset I_2 \supset \cdots \supset I_n$ ومنه السلسلة

$I_0 \times T \supset I_1 \times T \supset I_2 \times T \supset \cdots \supset I_n \times T$ هي سلسلة متناقصة من المثاليات الأولية الفعلية والمختلفة من S طولها n .ولنبرهن أنه لاتوجد سلسلة متناقصة من المثاليات الأولية الفعلية والمختلفة من S أطول منها.

لتكن $K_0 \supset K_1 \supset K_2 \supset \cdots \supset K_m$ سلسلة متناقصة من المثاليات الأولية الفعلية والمختلفة من S طولها m ،عندئذٍ من أجل كل $(i = 0,1,2, \dots , m)$ إما أن تكون $K_i = R \times J_i$ أو $K_i = P_i \times T$ حيث J_i و P_i مثاليات أولية من T و R على الترتيب

(بحسب الملاحظة السابقة) ،ومنه فإن السلسلة $K_0 \supset K_1 \supset K_2 \supset \cdots \supset K_m$ تقابلها إحدى السلسلتين $J_0 \supset J_1 \supset J_2 \supset \cdots \supset J_m$ أو $P_0 \supset P_1 \supset P_2 \supset \cdots \supset P_m$

وهما سلسلتان متناقصتان من المثاليات الأولية الفعلية والمختلفة من T أو R على الترتيب ،ومنه إما $m \leq \dim R = n$ أو $m \leq \dim T \leq \dim R = n$ ،وبالتالي $m \leq n$.

أصبح لدينا السلسلة $I_0 \times T \supset I_1 \times T \supset I_2 \times T \supset \cdots \supset I_n \times T$ سلسلة متناقصة من المثاليات الأولية الفعلية والمختلفة من S طولها n ولا توجد سلسلة أطول منها ،ومنه $\dim S = n = \dim R = \max\{\dim R\ , \dim T\}$ إذا

$\dim S = \max\{\dim R\ ,\dim T\}$ في حالة $\dim R \geq \dim T$. يمكن في حالة $\dim T \geq \dim R$ البرهان بشكل مشابه لما سبق على أن

$\dim S = \dim T = \max\{\dim R\ ,\dim T\}$ نستنتج من كل ماسبق أن :

$\dim S = \max\{\dim R\ ,\dim T\}$ في الحالة العامة .

أمثلة:1- إذا كان K حقلاً فإن بعد كرول له هو 0 ،لأن المثالية الأولية الفعلية الوحيدة فيه هي $\{0\}$.بعد كرول لحلقة الجداء الديكارتي لـِ $K \times K$ هو 0 أيضاً لأن المثاليتين الأوليتين الوحيدتين في $K \times K$ هما $\{0\} \times K$ و $K \times \{0\}$ ولا توجد علاقة احتواء بينهما.

2- لتكن Z حلقة الأعداد الصحيحة . إن $\dim Z = 1$ لأن أطول سلسلة من المثاليات الأولية الفعلية والمختلفة من Z هي $< p > \supset \{0\}$ حيث p عدد أولي وطولها واحد وبعد كرول لحلقة الجداء الديكارتي $Z \times K$ هو 1 لان أطول سلسلة من المثاليات الأولية الفعلية والمختلفة من$Z \times K$ هي السلسلة $< p > \times K \supset \{0\} \times K$ حيث p عدد أولي وطولها واحد.

3−4.خاصة: لتكن R و S حلقتين بعد كرول لهما منته ،وليكن f إيزومورفيزم حلقات من الحلقة R الى الحلقة S ،عندئذٍ يكون $\dim S = \dim R$.

البرهان: لنفرض أن $\dim R = n$ عندئذٍ توجد في R سلسلة متناقصة من المثاليات الأولية الفعلية والمختلفة من R طولها n ولا توجد سلسلة أطول منها ولتكن فرضاً السلسلة $I_0 \supset I_1 \supset I_2 \supset \cdots \supset I_n$ ،ولناخذ السلسلة

$f(I_0) \supset f(I_1) \supset f(I_2) \supset \cdots \supset f(I_n)$ وهي سلسلة متناقصة من المثاليات الأولية الفعلية والمختلفة من S طولها n (لأن f هو ايزومورفيزم حلقات) . لنفرض أن $J_0 \supset J_1 \supset J_2 \supset \cdots \supset J_m$ سلسلة متناقصة من المثاليات الأولية الفعلية والمختلفة من S طولها m ،عندئذٍ تكون السلسلة

$f^{-1}(J_0) \supset f^{-1}(J_1) \supset \cdots \supset f^{-1}(J_m)$ (لأن f هو ايزومورفيزم حلقات)

سلسلة متناقصة من المثاليات الأولية الفعلية والمختلفة من R طولها m ،وبماأن $\dim R = n$ ،فإن $m \leq n$ ،ومنه السلسلة $f(I_0) \supseteq f(I_1) \supseteq \cdots \supseteq f(I_n)$

هي سلسلة متناقصة من المثاليات الأولية الفعلية والمختلفة من S طولها n ولا توجد سلسلة أطول منها أي أن $\dim S = n = \dim R$.

4-4.تمهيدية: لتكن T و R حلقتين ،ولتكن $S = R \times T$ حلقة الجداء الديكارتي لهما ،عندئذٍ يوجد إيزومورفيزم حلقات بين الحلقتين $S[x_1, x_2, \dots, x_n]$ و $R[x_1, x_2, \dots, x_n] \times T[x_1, x_2, \dots, x_n]$.

البرهان: لنتبع طريقة الاستقراء الرياضي على n .

من أجل $n=1$: إذا كان $f(x_1)$ عنصر من $S[x_1]$ ،فإن:

$$f(x_1) \in S[x_1] \Rightarrow f(x_1) = \sum_{i=0}^{r} a_i x_1^i \ ; a_i \in S \ ; i = 0,1, \dots, r$$

أي أن :

$$f(x_1) = \sum_{i=0}^{r} (b_i, c_i) x_1^i \ ; \ b_i \in R \ , \ c_i \in T \, , a_i = (b_i, c_i)$$

وبالتالي فإن :

$$\left.\begin{array}{c} b_i \in R \Rightarrow \sum_{i=0}^{r} b_i x_1^i \in R[x_1] \\ \& \\ c_i \in T \Rightarrow \sum_{i=0}^{r} c x_1^i \in T[x_1] \end{array}\right\} \Rightarrow (\sum_{i=0}^{r} b_i x_1^i, \sum_{i=0}^{r} c x_1^i) \in R[x_1] \times T[x_1]$$

لنعرف الأن العلاقة:

$$\Phi: S[x_1] \to R[x_1] \times T[x_1]$$

بالشكل:

$$\Phi\big(f(x_1)\big) = \Phi\left(\sum_{i=0}^{r} (b_i, c_i) x_1^i\right) = \left(\sum_{i=0}^{r} b_i x_1^i \, , \sum_{i=0}^{r} c_i x_1^i\right)$$

عندئذٍ نجد أن Φ تطبيق ،لأنه إذا كان $f_1(x_1), f_2(x_1)$ عنصرين من $S[x_1]$ بحيث إن $f_1(x_1) = f_2(x_1)$ ،فإن :

$$f_1(x_1) \in S[x_1] \Rightarrow f_1(x_1) = \sum_{i=0}^{r_1} (b_i, c_i) x_1^i \,;\, b_i \in R \;,\; c_i \in T$$
$$; i = 0,1,2, \dots, r_1$$

$$f_2(x_1) \in S[x_1] \Rightarrow f_2(x_1) = \sum_{i=0}^{r_2} (b'_i, c'_i) x_1^i \,;\, b'_i \in R \;,\; c'_i \in T$$
$$; i = 0,1,2, \dots, r_2$$

وبماأن $f_1(x_1) = f_2(x_1)$، فإن :

$b_i = b'_i \;\&\; c_i = c'_i \;\&\; r_1 = r_2 \quad (i = 0,1,2, \dots, n_1 = n_2)$ ومنه :

$$\sum_{i=0}^{r} b_i x_1^i = \sum_{i=0}^{r} b'_i x_1^i \quad \& \quad \sum_{i=0}^{r} c_i x_1^i = \sum_{i=0}^{r} c'_i x_1^i \quad \Rightarrow$$
$$\left(\sum_{i=0}^{r} b_i x_1^i , \sum_{i=0}^{r} c_i x_1^i \right) = \left(\sum_{i=0}^{r} b'_i x_1^i , \sum_{i=0}^{r} c'_i x_1^i \right) \Rightarrow$$
$$\Phi\left(f_1(x_1)\right) = \Phi\left(f_2(x_1)\right)$$

كما أن Φ متباين ،لأنه إذا كان $f_2(x_1)$ و $f_1(x_1)$ عنصرين من $S[x_1]$ بحيث إن $\Phi\left(f_1(x_1)\right) = \Phi\left(f_2(x_1)\right)$، فإن :

$$\left(\sum_{i=0}^{r_1} b_i x_1^i , \sum_{i=0}^{r_1} c_i x_1^i \right) = \left(\sum_{i=0}^{r_2} b'_i x_1^i , \sum_{i=0}^{r_2} c'_i x_1^i \right) \Rightarrow$$
$$\sum_{i=0}^{r_1} b_i x_1^i = \sum_{i=0}^{r_2} b'_i x_1^i \quad \& \quad \sum_{i=0}^{r_1} c_i x_1^i = \sum_{i=0}^{r_2} c'_i x_1^i \quad \Rightarrow$$
$$b_i = b'_i \;\&\; c_i = c'_i \;\&\; r_1 = r_2 \quad (i = 0,1,2, \dots, r_1 = r_2) \Rightarrow$$
$$(b_i, c_i) = (b'_i, c'_i) \;\Rightarrow\; f_1(x_1) = f_2(x_1)$$

كما أن Φ غامر ،لأنه إذا كان $v(x_1)$ عنصر من $R[x_1] \times T[x_1]$، فإن :

$$v(x_1) = \left(\sum_{i=0}^{m_1} b'_i x_1^i , \sum_{j=0}^{m_2} c'_j x_1^j \right);\; b'_i \in R \;,\; c'_j \in T \begin{matrix} i = 0,1,2 \dots m_1 \\ j = 0,1,2 \dots m_2 \end{matrix}$$

بوضع $m = \max(m_1, m_2)$ نجد:

$$v(x_1) = \left(\sum_{i=0}^{m} b_i' x_1^i \,, \sum_{i=0}^{m} c_i' x_1^i\right)$$

(حيث أضفنا اصفاراً لكثير الحدود الذي درجته اقل)

إن $f(x_1) = \sum_{i=0}^{m} (b_i', c_i') x_1^i$ هو عنصر من $S[x_1]$ ويحقق

$$v(x_1) = \Phi\big(f(x_1)\big)$$

إن Φ هو هومومورفيزم حلقات لأنه : إذا كان $f_1(x_1), f_2(x_1)$ عنصرين من $S[x_1]$،فإن:

$$\left.\begin{aligned} f_1(x_1) \in S[x_1] \Rightarrow f_1(x_1) = \sum_{i=0}^{r_1} (b_i, c_i) x_1^i \\ f_2(x_1) \in S[x_1] \Rightarrow f_2(x_1) = \sum_{i=0}^{r_2} (b_i', c_i') x_1^i \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$$f_1(x_1) + f_2(x_1) = \sum_{i=0}^{r_1} (b_i, c_i) x_1^i + \sum_{i=0}^{r_2} (b_i', c_i') x_1^i =$$

$$\sum_{i=0}^{r=\max(r_1, r_2)} (b_i + b_i', c_i + c_i') x_1^i$$

(حيث أضفنا اصفاراً لكثير الحدود الذي درجته اقل) $\Rightarrow$

$$\Phi\left(f_1(x_1) + f_2(x_1)\right) = \left(\sum_{i=0}^{r} (b_i + b_i') x_1^i \,, \sum_{i=0}^{r} (c_i + c_i') x_1^i\right)$$

$$= \left(\sum_{i=0}^{r} b_i x_1^i + \sum_{i=0}^{r} b_i' x_1^i \,, \sum_{i=0}^{r} c_i x_1^i + \sum_{i=0}^{r} c_i' x_1^i\right)$$

$$= \left(\sum_{i=0}^{r} b_i x_1^i \,, \sum_{i=0}^{r} c_i x_1^i\right) + \left(\sum_{i=0}^{r} b_i' x_1^i \,, \sum_{i=0}^{r} c_i' x_1^i\right) \text{(بحذف الاصفار)}$$

$$= \left(\sum_{i=0}^{r_1} b_i x_1^i \,, \sum_{i=0}^{r_1} c_i x_1^i\right) + \left(\sum_{i=0}^{r_2} b_i' x_1^i \,, \sum_{i=0}^{r_2} c_i' x_1^i\right) =$$

$$\Phi\left(f_1(x_1)\right)+\Phi\left(f_2(x_1)\right)$$

لناخذ الأن $f_1(x_1)f_2(x_1)$:

$$f_1(x_1)f_2(x_1)=\sum_{k=0}^{r_1+r_2}(d_k,d'_k){x_1}^k$$ حيث :

$$d_k=\sum_{i+j=k}b_i\,b'_j \ \ \&\ \ d'_k=\sum_{i+j=k}c_i\,c'_j$$

ومنه:

$$\Phi\left(f_1(x_1)f_2(x_1)\right)=\Phi\left(\sum_{k=0}^{r_1+r_2}\left(d_k,d'_k\right)x_1^k\right)=$$

$$\left(\left(\sum_{i=0}^{r_1}b_ix_1^i\right)\left(\sum_{j=0}^{r_2}b'_jx_1^j\right),\left(\sum_{i=0}^{r_1}c_ix_1^i\right)\left(\sum_{j=0}^{r_2}c'_jx_1^j\right)\right)=$$

$$\left(\left(\sum_{i=0}^{r_1}b_ix_1^i\right),\left(\sum_{i=0}^{r_1}c_ix_1^i\right)\right)\left(\left(\sum_{j=0}^{r_2}b'_jx_1^j\right),\left(\sum_{j=0}^{r_2}c'_jx_1^j\right)\right)=$$

$$\Phi\left(f_1(x_1)\right)\Phi\left(f_2(x_1)\right)$$

نستنتج من كل ماسبق أن Φ هو إيزومورفيزيم حلقات من الحلقة $S[x_1]$ إلى الحلقة $R[x_1]\times T[x_1]$.

لنفرض أن القضية محققة من أجل n-1 أي لنفرض أنه يوجد إيزومورفيزم بين الحلقتين $S[x_1,x_2,\dots,x_{n-1}]$ و $R[x_1,x_2,\dots,x_{n-1}]\times T[x_1,x_2,\dots,x_{n-1}]$

ولنثبت أنه يوجد إيزومورفيزم حلقات بين الحلقتين $S[x_1,x_2,\dots,x_n]$ و $R[x_1,x_2,\dots,x_n]\times T[x_1,x_2,\dots,x_n]$. لنضع:

$$S_1=S[x_1,x_2,\dots,x_{n-1}],R_1=R[x_1,x_2,\dots,x_{n-1}]$$
$$T_1=T[x_1,x_2,\dots,x_{n-1}]$$

وبحسب الفرض الإستقرائي يوجد إيزومورفيزم وليكن Φ_0 بين الحلقتين S_1 و $R_1\times T_1$،

وبأخذ التطبيق :

$$\Phi_1: S_1[x_n] \to (R_1 \times T_1)[x_n]$$

بالشكل:

$$\Phi_1\big(\mathrm{f}(x_n)\big) = \Phi_1\left(\sum_{i=0}^{r} (b_i, c_i) x_n^i\right) = \sum_{i=0}^{r} \Phi_0(b_i, c_i) x_n^i \,;\, (b_i, c_i) \in S_1$$

إن Φ_1 هو تمديد لِـ Φ_0 و $\Phi_1((1,1)x_n) = \Phi_0((1,1))x_n = (1,1)x_n$ لذلك هو إيزومورفيزم حلقات بين الحلقتين $(R_1 \times T_1)[x_n]$ و $S_1[x_n]$.

لنعرف الأن العلاقة:

$$\Phi_2: (R_1 \times T_1)[x_n] \to R_1[x_n] \times T_1[x_n]$$

بالشكل:

$$\Phi_2\left(\sum_{i=0}^{r} (b_i, c_i) x_n^i\right) = \left(\sum_{i=0}^{r} b_i x_n^i \,, \sum_{i=0}^{r} c_i x_n^i\right); (b_i, c_i) \in R_1 \times T_1$$

يمكن بطريقة مشابه لبرهان Φ البرهان على أن Φ_2 هو إيزومورفيزم حلقات بين الحلقتين $(R_1 \times T_1)[x_n]$و $R_1[x_n] \times T_1[x_n]$ ، وبأخذ تركيب الإيزومرفيزمين Φ_2 و Φ_1 ،يكون $\Phi_2 \circ \Phi_1$ هو إيزومورقيزم حلقات بين الحلقتين$S_1[x_n]$ و$R_1[x_n] \times T_1[x_n]$ ،وبما ان $S_1 = S[x_1, x_2, \dots, x_{n-1}]$ ،فإن $S_1[x_n] = S[x_1, x_2, \dots, x_n]$ وبالمثل يكون

$$R_1[x_n] \times T_1[x_n] = R[x_1, x_2, \dots, x_n] \times T[x_1, x_2, \dots, x_n]$$

أي أن $\Phi_2 \circ \Phi_1$ هو إيزومورفيزم حلقات بين الحلقتين $S[x_1, x_2, \dots, x_n]$ و $R[x_1, x_2, \dots, x_n] \times T[x_1, x_2, \dots, x_n]$ ، أي أنه يوجد إيزومورفيزم حلقات بين الحلقتين $S[x_1, x_2, \dots, x_n]$ و $R[x_1, x_2, \dots, x_n] \times T[x_1, x_2, \dots, x_n]$.

4−5.نتيجة: لتكن T و R حلقتين ،ولتكن $S = R \times T$ حلقة الجداء الديكارتي لهما ،عندئذٍ:

$$\dim(S[x_1, x_2, \dots, x_n]) \\ = \dim(R[x_1, x_2, \dots, x_n] \times T[x_1, x_2, \dots, x_n])$$

البرهان: بما أن T و R حلقتين ،و $S = R \times T$ حلقة الجداء الديكارتي

لهمـا ،فإنــه بحسـب التمهيديــة السـابقة يوجد إيزومـورفيزم حلقـات بـين الحلقتـين $S[x_1,x_2,\dots,x_n]$ و $R[x_1,x_2,\dots,x_n]\times T[x_1,x_2,\dots,x_n]$.

بما أن بعد كرول للحلقتين $S[x_1,x_2,\dots,x_n]$

و $R[x_1,x_2,\dots,x_n]\times T[x_1,x_2,\dots,x_n]$ منته فإنه بحسب الخاصة 4-3 نجد :

$$\dim(S[x_1,x_2,\dots,x_n]) = \dim(R[x_1,x_2,\dots,x_n]\times T[x_1,x_2,\dots,x_n])$$

4−6.نتيجة: لتكن T و R حلقتي جفارد ،عندئذٍ حلقة الجداء الديكارتي $S=R\times T$ هي حلقة جفارد.

البرهان: لكي نثبت أن الحلقة S حلقة جفارد يكفي إثبات أن

$\dim(S[x_1,x_2,\dots,x_n])=\dim(S)+n$.بماأن T و R حلقتين و

$S=R\times T$ حلقة الجداء الديكارتي لهما ،فإن بعد كرول للحلقة S هو

$\max\{\dim R\ ,\dim T\}$(بحسب التمهيدية 4-2) ،وبحسب النتيجة السابقة نجد أن:

$$\dim(S[x_1,x_2,\dots,x_n]) = \dim(R[x_1,x_2,\dots,x_n]\times T[x_1,x_2,\dots,x_n])$$

وبما أن T و R حلقتي جفارد ،فإن

$$\dim(R[x_1,x_2,\dots,x_n])=\dim R+n \quad \& \quad \dim(T[x_1,x_2,\dots,x_n])=\dim T+n$$

وبحسب التمهيدية 4-2 يكون

$$\begin{aligned}&\dim(R[x_1,x_2,\dots,x_n]\times T[x_1,x_2,\dots,x_n]) = \\ &max\{\dim(R[x_1,x_2,\dots,x_n]),\dim(T[x_1,x_2,\dots,x_n])\} = \\ &max\{\dim R+n\ ,\dim T+n\}=n+\max\{\dim R\ ,\dim T\} \\ &= n+\dim S\end{aligned}$$

4−7.مبرهنة: لتكن A حلقة بعد كرول لها منته ،ولتكن G زمرة منتهية التوليد ،ولتكن $R=A[G]$ حلقة الزمر للزمرة G فوق الحلقة A ،عندئذٍ يكون $\dim R\ge \dim A+r$ حيث r عدد مولدات الزمرة G .

البرهان: لنطبق البرهان بطريقة الأستقراء الرياضي على r . من أجل r=1

بمـاان r=1 ،فـإن G زمـرة دائريـة مولـدة بعنصـر واحـد ،ومنـه يوجـد إيزومـورفيزم بـين الحلقتـين $A[G]$ و $A[x]$ (بحسـب المبرهنـة 3-1) ،و وبمـاان بعـد كـرول

للحلقتين $A[G]$ و $A[x]$ منتهٍ فإنه بحسب الخاصة 3-4 يكون $\dim(A[x]) = \dim(A[G])$، وبحسب المبرهنة 3-2 لدينا $\dim(A[x]) \geq \dim A + 1$. إذاً

$$\dim R \geq \dim A + 1$$

لنفرض الأن أن $r>1$ وأنه من أجل أي زمرة G مولدة بـ $r-1$ عنصر يكون

$$\dim R \geq \dim A + r - 1$$

و لنثبت أنه في حالة G زمرة مولدة بـ r عنصر يكون

$$\dim R \geq \dim A + r$$

بماان G زمرة مولدة بـ r عنصر ،فإنه توجد مجموعة مكونة من r عنصر تولدها ولتكن المجموعة $\{g_1, g_2, \dots, g_r\}$، ولنأخذ $G' =< g_1, g_2, \dots, g_{r-1} >$

عندئذٍ من الفرض يكون

$$\dim A[G'\} \geq \dim A + r - 1$$

لنضع $A[G'] = A'$ عندئذٍ يكون

$\dim A' \geq \dim A + r - 1$ ويوجد ايزومورفيزم حلقات بين الحلقة $A'[< g_r >]$ و الحلقة $A'[x]$ (بحسب المبرهنة 3-1) ، أي أن $\dim(A'[x]) = \dim(A'[< g_r >$]) وحسب المبرهنة 3-2 يكون $\dim(A'[x]) \geq \dim A' + 1$ ومنه $\dim(A'[< g_r >]) \geq \dim A' + 1$. بما أن :

$$\dim(A'[< g_r >]) \geq \dim A' + 1 \ \& \ \dim A' \geq \dim A + r - 1$$

فإن $\dim(A'[< g_r >]) \geq \dim A + r$ وإن $A'[< g_r >] = A[G] = R$

نستنتج من كل ما سبق أن

$$\dim R \geq \dim A + r$$

لكل عدد طبيعي r .

4–8.نتيجة: لتكن A حلقة جفارد بعد كرول لها منتهٍ ،ولتكن G زمرة منتهية التوليد ، ولتكن $R = A[G]$ حلقة الزمر للزمرة G فوق الحلقة A ،عندئذٍ يكون :

$\dim R = \dim A + r$ حيث r عدد مولدات الزمرة G .

البرهان: ينتج من المبرهنة السابقة مع مراعاة أن A حلقة جفارد.

4–9.نتيجة: لتكن A حلقة جفارد بعد كرول لها منتهٍ ،ولتكن G زمرة منتهية التوليد ،

ولتكن $R = A[G]$ حلقة الزمر للزمرة G فوق الحلقة A ،عندئذٍ $R = A[G]$ تكون حلقة جفارد.

البرهان: لنثبت أن:

$$\dim(R[x_1, x_2, \dots, x_n]) = \dim R + n$$

لنفرض أن G مولدة بـ r عنصر ،عندئذٍ يكون بحسب النتيجة السابقة

$$\dim(A[x_1, x_2, \dots, x_n][G]) = \dim(A[x_1, x_2, \dots, x_n]) + r$$

وبماأن A حلقة جفارد ،فإن $\dim(A[x_1, x_2, \dots, x_n]) = \dim A + n$ ،

ومنه

$$\begin{gathered}\dim(R[x_1, x_2, \dots, x_n]) = \dim(A[G][x_1, x_2, \dots, x_n]) = \\ \dim(A[x_1, x_2, \dots, x_n][G]) = \dim(A[x_1, x_2, \dots, x_n]) + r \\ = \dim A + r + n = \dim R + n\end{gathered}$$

مثال: ليكن K حقلاً ، ولتكن $G =< g >$ زمرة دائرية مولدة بعنصر واحد .إن حلقة الزمر $K[G]$ هي حلقة جفارد بعد كرول لها هو 1 ،لأنه بحسب النتيجة 8-4 وكون K حلقة جفارد ،يكون $\dim K[G] = \dim K + 1 = 1$ ،

وبحسب النتيجة السابقة تكون حلقة الزمر $K[G]$ حلقة جفارد.

References

1. John J. Watkins,**Krull Dimension of Polynomial and Power Series Rings.** Progress in Commutative Algebra 2, 205–219 **, 2012.**
2. John J.Watkins , **Topics In Commutative Ring Theory ,**Princeton university press , Princeton and Oxford 2006.
3. Hoang Dinh Van **, KRULL DIMENSION ,** Antwerp 2014 **.**
4. A.Bouvier , S. Kabbaj , **Exampels of Jaffard domains,** university claud ernard , lyon,1987 .
5. S.K.Sehgal ,**Topics in group rings .**department of mathematics university of Edmonton Alberta ,Canada ,1983.
6. Evan Dummit ,**Ring theory (part 2),**2017,v.1.00.